**第四章**

**量子傅立葉轉換及其應用**

當1822年，傅立葉發表了他最著名的文章(作品)，人們最初使用他的轉換在熱力學。現在，傅立葉轉換最常見的用途是信號處理。在時域 (time domain) 中給出一個信號:作為函數映時間到振幅。傅立葉轉換允許我們將信號表示為不同頻率的相移正弦的加權總和。與頻率相關的相位和權重描述頻域中的信號。傅立葉轉換在時間域信號表示和頻域之間架起橋樑。

傅立葉轉換的成功是由於它的離散版本，我們稱之為 ***離散傅立葉轉換 (*或** ***DFT***)。離散的 傅立葉轉換具有計算效率非常高效的實現，其形式為***快速傅立葉轉換*** (或 **FFT**)。本章介紹複雜的集合根，並研究其性質。接下來,我們演示離散傅立葉轉換和離散傅立葉轉換的反向操作。接下來，我們介紹***量子傅立葉轉換*** (或***QFT)***，這是傅立葉轉換的量子版本，類似於快速的傅立葉轉換。接下來，我們介紹如何編寫一個量子程式，實現離散傅立葉轉換和離散傅立葉轉換的反向操作。

**4.1複雜的集合根介紹**

複數指數的定義是：

= cos(*θ*) + × sin(*θ*). (4.1)

方程式 (4.1) 的*θ* 值是一個實數。T在複數平面的任何點*(a*, *b*) 和複數平面的原點 (0, 0) 之間的距離是：

= . (4.2)

*a*的值是實數, *b*的值也是實數。因為根據方程式 (4.2), 方程式 (4.1) 中複數指數與複數平面的原點之間的距離為 = = 1,，每個以複數平面原點為中心的單位半徑圓周圍均等。

***集合複合第 n*** ***根***是一個複數*ω*,這樣。

*ωn* = 1。 (4.3) 。

實際上有*n* 個複數的 complex *n*根的集合： to *k* = 0, 1, 2, … , *n* − 2, *n* − 1。每個複數 *n*th 集合根之間的距離,對於for *k* = 0, 1, 2, … , *n* − 2, *n* − 1和複數平面的原點點為 = = 1。因此,對於for *k* = 0, 1, 2, … , *n* − 2, *n* − 1,這是*一*個複數的 *n th*根的集合,均在以複數平面原點為中心的單位半徑圓周圍相等的張角。 。

***集合的主要根***是。

*ωn* = . (4.4)

因為其他複雜*n th* 集合根的是= = *ωnk* for *k* = 0, 2, 3, … , *n* − 2, *n* − 1, 它們是方程式(4.4) *ωn* 中的 n 的力。因此，集合中*n* 個複數的 *n*根為

*ωn*0, *ωn*1, *ωn*2, … , *ωnn* − 2, *ωnn* − 1. (4.5)

圖 4.1 顯示在 (4.5) *ωn*0, *ωn*1, *ωn*2, … , *ωnn* − 2, *ωnn* − 1 是*n* 個複數 *n*- 。

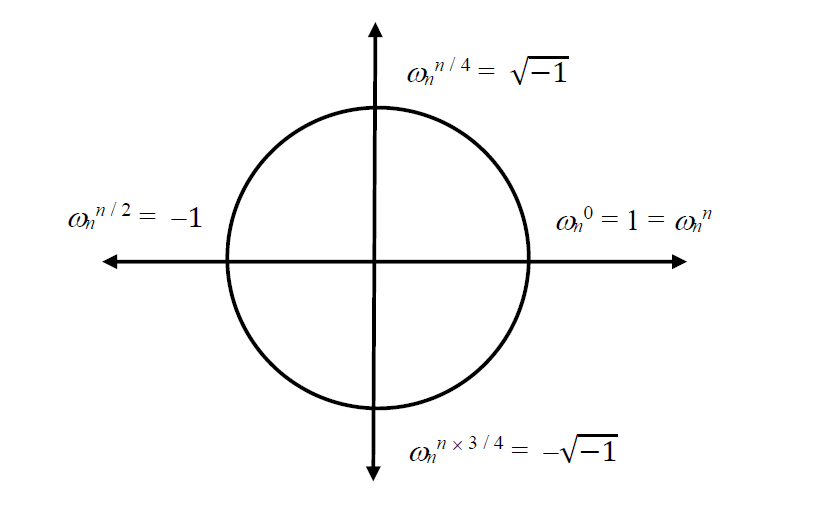


圖 4.1:複數平面中*ωn*0, *ωn*1, *ωn*2, … , *ωnn* − 2, *ωnn* − 1的值。

集合根在以複雜平面原點為中心的單位半徑圓周圍均等地張住。也就是說, *ωn*0, *ωn*1, *ωn*2, … , *ωnn* − 2, *ωnn* − 1位於以複雜平面原點為中心的單位半徑圓的圓周長。

**4.2 阿貝利亞組織為 n 複數第n根集合與乘法的二元操作的插圖**。

組 (*S*,) 是一組 (*S*, \*) 以及一個在 S 上表示的二進位操作\*，以下四個屬性都持有該二進位操作。第一個屬性是,對於所有 *a*,b *S,*∈我們有一*個 a* \* *b* ∈ *S*。這就是說,這個團體(*S*, \*)有***closure***。第二個屬性是,有一個*元素 e* ∈ *S*,稱為群組的識別 (*S*, \*),因此*e* \* *a* = *a* \* *e* = *a* for all *a* ∈ *S*。第三個屬性是,對於*所有a*, *b*, *c* ∈ *S,* 我們有e (*a* \* *b*) \* *c* = *a* \* (*b* \* *c*).這表明群組(*S*, \*)具有**關聯性**。第四個屬性是,對於each *a* ∈ *S*存在唯一的元素*b,*, called the 稱為的***倒反***，像是*a* \* *b* = *b* \* *a* = *e。* 如果一個群組(*S*, \*)滿足***交換法****a* \* *c* = *c* \* *a* for all *a*, *c* ∈ *S，*那麼是一個***阿貝利亞組***。

我們假設一組*S*是{*ωn*0, *ωn*1, *ωn*2, … , *ωnn* − 2, *ωnn* − 1}這是一組n*複數*的第n根的集合。我們還假設二進位操作×是S 上表示的乘*法*。我們使用 **定理 4-1**來證明 (*S* = {*ωn*0, *ωn*1, *ωn*2, … , *ωnn* − 2, *ωnn* − 1}, ×)是阿貝利亞組。×

**定理 4-1**: (*S* = {*ωn*0, *ωn*1, *ωn*2, … , *ωnn* − 2, *ωnn* − 1}, ×)是一個阿貝利亞組。

**證明**: 。

對所有*ωnj*, *ωnk* ∈ *S* to 0 ≤ *j* ≤ (*n* − 1) and 0 ≤ *k* ≤ (*n* − 1) , 我們有*ωnj* × *ωnk* = *ωnj*+*k*。如果(*j* + *k*) 的值從0 (零) 到 (*n* − 1),則*ωnj*+*k* ∈ *S*。如果值 (*j* + *k*)從*n*到(2 ×*n* −2),則 *ωnj*+*k* = *ωnn*+*p* = *ωnn* × *ωnp* = 1 × *ωnp* = *ωnp* ∈ *S* to 0 ≤ *p* ≤ (*n* − 2)。這就是說,它滿足***closure***。在S中，有一個元素 *ωn*0 等於其每個元素*ωnk* ∈ *S* to 0 ≤ *k* ≤ (*n* − 1) 滿足*ωn*0 × *ωnk* = 1 × *ωnk* = *ωnk* and *ωnk* × *ωn*0 = *ωnk* × 1 = *ωnk*。這表示 *ωn*0 × *ωnk* = *ωnk* × *ωn*0 = *ωn*。因此,它有一個***識別*** *ωn*0。

對於 所有 *ωnj*, *ωnk*, *ωnl* ∈ *S* to 0 ≤ *j* ≤ (*n* − 1) and 0 ≤ *k* ≤ (*n* − 1) and 0 ≤ *l* ≤ (*n* − 1), 我們有 (*ωnj* × *ωnk*) × *ωnl* = *ωn*(*j+k*)*+l* = *ωnj+*(*k+l*) = *ωnj* × *ωnk+l* = *ωnj* × (*ωnk* × *ωnl*)。 這意味著它滿足***關聯性***。對於每個元素 *ωnk* ∈ *S* to 0 ≤ *k* ≤ (*n* − 1),我們有 *ωnk* × *ωnn−k* = *ωnn−k* × *ωnk* = *ωnn* = 1 = *ωn*0。這就是說 *ωnn−k*是*ωnk****的反轉***。對於所有*ωnj*, *ωnk* ∈ *S* to 0 ≤ *j* ≤ (*n* − 1) and 0 ≤ *k* ≤ (*n* − 1) , 我們有 *ωnj* × *ωnk* = *ωnj*+*k* = *ωnk*+*j* = *ωnk* × *ωnj*。這就是說,它滿足了***交換律***。因此,從上面的語句,我們推斷一下(*S* = {*ωn*0, *ωn*1, *ωn*2, … , *ωnn* − 2, *ωnn* − 1}, ×),是阿貝利亞組。

**4.3 集合第n根複數屬性的描述**。

我們使用以下定理來介紹統一的複合n 根的必要屬性。

**定理 4-2**: 對於任何整數*n* ≥ 0, *k* ≥ 0, and *j >* 0,

*ωj×nj×k* = *ωnk*. (4.6)

**證明**: 。

依方程式 (4.4), 我們有 *ωj×nj×k* = () *j×k* = ()*k* = *ωnk*.因此,我們一次推斷任何*ωj×nj×k* = *ωnk* 對任何整數 *n* ≥ 0, *k* ≥ 0, and *j >* 0。

**定理 4-3**: 對於任何***偶數*** 整數n *>* 0, 。

*ωnn /*2 = *ω*2 = −1. (4.7)

**證明**: 。

根據方程式 (4.4),我們有*ωnn /*2 = ()*n*/2 = () = *ω*2 = −1。因此,我們一次派生 *ωnn /*2 = *ω*2 = −1 對於任何***偶數*** 整數*n* *>* 0。

**定理 4-4 :**對於任何正偶數n, **集合***的 n 複合* *n*根的平方是集合的 (*n* / 2)複合(*n* / 2)根。 。

**證明**: 。

n複數集合的根*ωnk* ，對任何*非負*性整數k。(*n* / 2)複數集合的根*ωn*/2*k* ，對任何*非負*性整數k。因為集合的*複數 n*根的平方是(*ωnk*)2,我們有= ()2 = = = *ωn*/2*k*.。這就是說,集合的*複數根*的平方是集合的複數*(n/* 2)根。

從**定理4-3,**我們有*ωnn /*2 = −1.。這意味著 *ωnk+*(*n /*2) = *ωnk* × *ωnn /*2 = *ωnk* × (−1) = −*ωnk*.。因此,我們獲得 (*ωnk+*(*n /*2))2 = (−*ωnk*)2 = (*ωnk*)2 。這表示*ωnk* 和 *ωnk+*(*n /*2)具有相同的平方。這也是說,如果我們取集合所有複數*n根*的平方,然後我們實際上得到每個複雜(*n* / 2)根的集合兩次。因此,從上面的陳述中,我們一次推斷,對於任何正偶數*n,*,集合*的n複數* n根的平方是 (*n* / 2) 複數*(n/* 2)的平方根。

**定理 4-5**: 對於任何整數*n* ≥ 1與非零整數 *k*無法被 n整數*整除*, 。

= 0. (4.8)

**證明**: 。

方程中 (4.8) 的通用比例 為 *ωnk*。因為非零整數 *k*不能被 n整除*n*,所以 *ωnk*的值不等於 1。因此,我們有 = ((*ωnk*)*n* − 1) / (*ωnk* − 1) = ((*ωnn*)*k* − 1) / (*ωnk* − 1) = ((1)*k* − 1) / (*ωnk* − 1) = (1 − 1) / (*ωnk* − 1) = (0) / (*ωnk* − 1) = 0

**4.4 離散傅立葉轉換和反向離散傅立葉轉換的介紹**。

我們假設a (*n* × 1) 向量*a* = (*a*0, *a*1, *a*2, … , *an* − 1)*T*具有每個座標*ak* to 0 ≤ *k* ≤ (*n* − 1) 是一個複數, 其中(*n* × 1)向量*a* = (*a*0, *a*1, *a*2, … , *an* − 1)*T*是 (1 × *n*) 向量(*a*0, *a*1, *a*2, … , *an* − 1)。此外,我們假設另一個*y向量y* = (*y*0, *y*1, *y*2, … , *yn* − 1)*T*具有每個座標 *yk* to 0 ≤ *k* ≤ (*n* − 1)是一個複數, 其中 (*n* ×1) 向量*y* = (*y*0, *y*1, *y*2, … , *yn* − 1)*T*是 (1 × *n*) 向量(*y*0, *y*1, *y*2, … , *yn* − 1) 的。離散傅立葉轉換的矩陣 **DFT**如下所示。

() × . (4.9)

向量 a = (*a*0, *a*1, *a*2, … , *an* − 1)*T* 的*離*散傅立葉轉換表示為向量*y* = (*y*0, *y*1, *y*2, … , *yn* − 1)*T* = **DFT** × *a*。在向量y中的*傅立葉係數 yk* for 0 ≤ *k* ≤ (*n* − 1)如下。

*yk* = () × . (4.10)

離散傅立葉轉換的轉置**IDFT** 矩陣如下。

() × .

(4.11)

向量 *y* = (*y*0, *y*1, *y*2, … , *yn* − 1)的反轉離散傅立葉轉換表示為向量*a* = (*a*0, *a*1, *a*2, … , *an* − 1)*T* = **IDFT** × *y*。在向量 *a*中的反向傅立葉係數*ak* for 0 ≤ *k* ≤ (*n* − 1)如下

*ak* = (). 。×(4.12) 。

在方程式 (4.11) 中逆向離散傅立葉轉換的**IDFT**矩陣，實際上是與方程式(4.9) 中離散傅立葉轉換的**DFT矩陣偶連轉置**。同樣，在方程式(4.9)中的 **DFT**矩陣的傅立葉轉換，實際上是與方程式(4.11)中離散傅立葉轉換的**IDFT矩陣偶連轉置**。我們使用以下兩個定理來表示方程式(4.9)中離散傅立葉轉換的**DFT矩陣**是**單一矩陣(一個單一運算符)**,而方程式(4.11)中傅立葉轉換的**IDFT矩陣**也是一個單一矩陣(一個單一運算符)。

**定理 4-6**: 方程式(4.9) 中傅立葉轉換的**DFT**矩陣是一個單位矩陣(單位運算符)。

**證明**: 。

對於0 ≤ *j* ≤ (*n* − 1) 和0 ≤ *k* ≤ (*n* − 1), 在方程式(4.9)中離散傅立葉轉換的**DFT**矩陣是( × *ωnk* × *j*)。同樣,對於0 ≤ *j* ≤ (*n* − 1) 和 0 ≤ *k* ≤ (*n* − 1),在方程式(4.11)中離散傅立葉轉換**IDFT矩陣**是( × *ωn−k* × *j*)。我們有**DFT** × **IDFT**的(*j*, *l*)項目等於(1 / *n*) × () = (1 / *n*) × (如果 j 的值等於 *l* 的值,則此求和等於1,否則**定理 4-5**等於求和0。這就是說**DFT** × **IDFT**是一個 (*n* × *n*)單位矩陣. 。

同樣, **IDFT** × **DFT**的(*j*, *l*)項等於(1 / *n*) × () = (1 / *n*) × (。如果*j* = *l，*此求和等於 1, 否則由定理**4-5,**即求和0。這表示**IDFT** × **DFT**是一個 (*n* × *n*)單位矩陣。因此,從上面的語句中,我們一次推斷方程 式(4.9)中的的離散傅立葉轉換矩陣**DFT**是一個單一矩陣(一個單一運算符)。

**定理 4-7** : 方程(4.11)中的反轉離散傅立葉轉換矩陣**IDFT**也是一個單一矩陣(單一運算符)。

**證明**: 。

對於0 ≤ *j* ≤ (*n* − 1) 和0 ≤ *k* ≤ (*n* − 1),在方程式(4.11)中的反轉離散傅立葉轉換的**IDFT**矩陣的*(k*, *j*)項目是 ( × *ωn−k* × *j*).。同樣,對於 0 ≤ *j* ≤ (*n* − 1) 和0 ≤ *k* ≤ (*n* − 1) ，在方程式(4.9)中的反轉離散傅立葉轉換的**DFT**矩陣的*(k*, *j*)項目是( × *ωnk* × *j*)。我們有**IDFT** × **DFT**的(*j*, *l*) **項目**等於 (1 / *n*) × () = (1 / *n*) × (。如果 j 的值等於 *l*的值,則*此求和*等於1,否則**定理 4-5**等於求和0。這表示**IDFT** × **DFT**是×一個(*n* × *n*) *單位*矩陣. 。

同樣, **DFT** × **IDFT** 的(*j*, *l*)項目等於 (1 / *n*) × () = (1 / *n*) × (。如果*j* = *l*, 此求和等於 1，否則由 **定理 4-5,**即求和0。這就是說**DFT** × **IDFT**是一個 (*n* × *n*) 單位矩陣.因此,從上面的語句中,我們一次得出方程式 (4.11) 反轉離散傅立葉轉換矩陣**IDFT**的是一個單一矩陣(一個單一運算符)。 ◼

**4.5 實現離散傅立葉轉換的量子傅立葉轉換**。

希爾伯特空間的 *n*維正射基礎α如下。

α = {(1, 0, 0, … , 0)*T*, (0, 1, 0, … , 0)*T*, (0, 0, 1, … , 0)*T*, … , (0, 0, 0, … , 1)*T*}. (4.13)

在不失去一般性的情況下,我們假設 *n* 是二 (2) 的力量。n 維正交基礎中每個元素的長度α是統一的。n 維正交基礎中任何兩個元素的內部產品 α為零。中的每個元素都是計算基礎向量。我們使用計算基礎狀態 |0> 對第一個計算基礎向量 (1, 0, 0, … , 0)*T*.進行編碼。我們應用計算基礎狀態|1>對第二個計算基礎向量(0, 1, 0, … , 0)*T*進行編碼。我們使用計算基礎狀態 |2>對第三個計算基礎向量 r (0, 0, 1, … , 0)*T*等進行編碼,我們使用計算基礎狀態。|*n* − 1> 編碼最後一個計算基礎向量 (0, 0, 0, … , 1)*T*.這就是說,基礎{|0>, |1>, |2>, … , |*n* − 1>} 編碼成希爾伯特空間的n維正交基礎α。

疊加 |*β* >是每個計算基礎向量(或每個計算基礎狀態)的線性組合,因此疊加|*β* >如下所示。

|*β* > = = . (4.14)

In 疊加 |*β* >在方程式(4.14), *βa*表示0 ≤ *a* ≤ (*n* − 1)是每個計算基礎狀態的振幅|*a*>這樣 = 1。

量子**傅立葉變換**的矩陣**QFT**與方程式(4.9)中離散**傅立葉**變換的矩陣DFT相同。由於**QFT 和** **DFT**是相同的矩陣,DFT是**定理 4-6**中的單一矩陣(單一運算子),因此**QFT**也是一個單一矩陣(單一運算符)。量子傅立葉轉換是一個計算非常高效的實現離散的傅立葉轉換,其形式是追溯到 **QFT** 到其張量產物分解。量子 Fourier 變換將方程中的疊加位|*β* > = 轉換為以下新的疊加。

|*y* > = **QFT** (|*β* >) = **QFT** () = () × (). (4.15)

在新的疊加 |*y* >在方程式(4.15),傅立葉係數*yk* for 0 ≤ *k* ≤ (*n* − 1) 如下。

*yk* = () × (). (4.16)

將**QFT(**量子傅立葉變換)應用於計算基礎狀態 |*a*> for 0 ≤ *a* ≤ (*n* − 1) 產生。

**QFT** × (|*a*>) = **QFT** (|*a*>) = () × (). (4.17)

在下面的中,*我們採取n* = 2*N*,*其中N*是量子計算機中的量子位數,基礎{|0>, |1>, |2>, … , |2*N* − 1>}是量子計算機的計算基礎。我們在這裡提到 () = () = (。編寫計算基礎狀態非常有用。對於 |*a*> for 0 ≤ *a* ≤ (2*N* − 1)使用*二*進制表示形式 *a* = *a*1 *a*2 *a*3 … *aN* = *a*1 × 2*N* − 1 + *a*2 × 2*N* − 2 + *a*3 × 2*N* − 3 + … + *aN* × 20。編寫符號 0 也非常有用。 *a*1 *a*2 *a*3 … *aN* 表示二進位數*a*1 × 2− 1 + *a*2 × 2− 2 + *a*3 × 2− 3 + … + *aN* × 2−*N*。以下非常有用的產品表示是張量產品分解的量子傅立葉變換: 。

**QFT** (|*a*>) = **QFT** (|*a*1 *a*2 *a*3 … *aN*>) = () ⊗ () ⊗ () ⊗ … ⊗ (). (4.18)

產品表示 (4.18) 實際上是量子傅立葉變換的定義。我們使用以下定理來顯示產品表示產品表式 (4.18) 和定義 (4.17) 與量子傅立葉轉換的等效性。

**定理 4-8**:product產品表示形式(4.18)相當於量子傅立葉轉換的定義(4.17),與*量子*傅立葉轉換的定義相當。

**證明**: 。

因為我們用*n* = 2*N* 將 **QFT** (量子傅立葉變換) 應用於計算基礎狀態|*a*> for 0 ≤ *a* ≤ (2*N* − 1),量子傅立葉變換的定義 (4.17) 如下所示。

**QFT** (|*a*>) = () × () = () × (). (4.19)

我們編寫計算基礎狀態 |*k*> for 0 ≤ *k* ≤ (2*N* − 1)使用二進制表示*k* = *k*1 *k*2 *k*3 … *kN* = *k*1 × 2*N* − 1 + *k*2 × 2*N* − 2 + *k*3 × 2*N* − 3 + … + *kN* × 20。我們還編寫符號 0。*k*1 *k*2 *k*3 … *kN* 表示二進位數*k*1 × 2− 1 + *k*2 × 2− 2 + *k*3 × 2− 3 + … + *kN* × 2−*N*。分式*k* / 2*N*的計算是*k* / 2*N* = *k*1 *k*2 *k*3 … *kN* / 2*N* = (*k*1 × 2*N* − 1 + *k*2 × 2*N* − 2 + *k*3 × 2*N* − 3 + … + *kN* × 20) / 2*N* = *k*1 × 2−1 + *k*2 × 2−2 + *k*3 × 2−3 + … + *kN* × 2−*N* = (). 總和的計算是完成 2*N*項的總和。總和的計算也是完成2*N* 項的總和。如果它們處理相同的項目,則 n () = ()因此,我們重寫量子傅立葉轉換的定義(4.19),如下所示。

**QFT** (|*a*>) = () × (). (4.20)

產品表示 ()等於() ⊗ () ⊗ … ⊗ () = () = () = ()。因此,我們重寫量子傅立葉轉換的定義(4.20),如下所示。

**QFT** (|*a*>) = () × () (4.21)

= () × () (4.22)

= () × ()) (4.23)

= () × ()). (4.24)

除法(*a* × 2−*l* = *a* / 2*l*) for 1 ≤ *l* ≤ *N*的計算為完成*l位置的左移到*小數點"." 。這就是說,對於1 ≤ *l* ≤ *N,* 我們得到一*個a* × 2−*l* = *a* / 2*l* = *a*1 … *aN* − *l*.*aN* − *l* + 1 *aN*− *l* + 2 … *aN*..因此,我們獲得 = = = ( × ) = (1 × ) = ()。接下來,我們重寫量子傅立葉轉換的定義(4.24),如下所示。×

**QFT** (|*a*>) = **QFT** (|*a*1 *a*2 *a*3 … *aN*>) = () ⊗ () ⊗ () ⊗ … ⊗ (). (4.25)

因此,從上面的語句中,我們一次推斷出產品表示(4.18)相當於量子傅立葉變換的定義 (4.17),並且與*量子*傅立葉轉換的定義相等。

+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

**4.6 實現量子傅立葉變換的量子電路**

“如果C為真，則執行D”。這種類型的受控操作是派生用於量子傅立葉變換的非常高效的電路中最有用的一種。 A（2×2）矩陣*Rk*, *c*如下

*Rk*, *c* = = . (4.26)

作為A (2 × 2)矩陣的共軛轉置的（2 2 2）矩陣*Rk*, *c*如下

= = = . (4.27)

因為*Rk*, *c* × = ( × ) = () = () = () = () and × *Rk*, *c* = ( × ) = () = () = () = ()，矩陣*Rk*, *c*是a矩陣（單一運算符），矩陣是矩陣（單一運算符）。 *Rk*, *c*受控操作是包含控制位和目標位的兩個量子位的操作。如果控制位設置為| 1>，則將矩陣*Rk*, *c*應用於目標位。否則，矩陣*Rk*, *c*不會改變目標位。

類似地，受控操作是兩個量子位的操作，其中兩個量子位包括控制位和目標位。如果控制位設置為| 1>，則將矩陣*Rk*, *c*應用於目標位。否則，矩陣不會改變目標位。受控*Rk*, *c*操作和受控操作的矩陣表示為

*CRk*, *c* = and *C* = . (4.28)

公式（4.28）中的矩陣*C* 是公式中矩陣*CRk*, *c*的共軛轉置 (4.28) 因為.

*CRk*, *c* × *C* = =

和*C* × *CRk*, *c* = = , *CRk*, *c* ×

*C*是一個單位矩陣*，C × CRk, c*也是一個單位矩陣。因此*，CRk, c × C = C × CRk, c*和矩陣*CRk, c*以及矩陣*CRk, c*都是矩陣（單一運算符）。圖*4.2*顯示了受控*CRk, c*的電路表示，圖*4.3*顯示了受控*C*運算的電路表示。

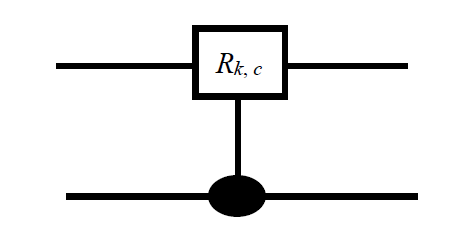


圖4.2：Controlled- *Rk*, *c*操作，其中底線是控制位，頂線是目標位。

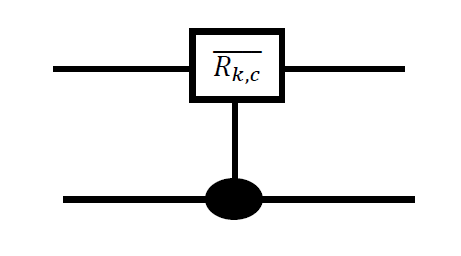


圖4.3：Controlled-操作，其中底線是控制位，頂線是目標位。

一個(4 × 4)矩陣交換及其共軛轉置

*swap* = and = . (4.29)

因為*swap* × = = × *swap矩*陣交換和矩陣都是矩陣（單一運算符）。矩陣交換是兩個量子位交換閘的矩陣表示。交換閘的功能是交換包含在兩個量子位中的信息。圖左圖

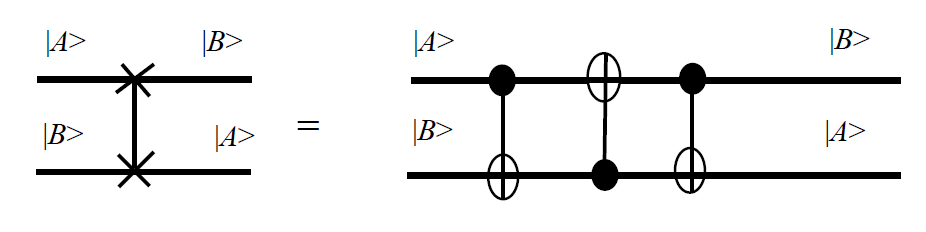
****

圖4.4：具有兩個量子位的交換閘的電路表示。

圖4.4是具有兩個量子位的交換閘的電路表示，圖4.4的右圖是通過使用三個CNOT閘實現交換閘的電路表示。

初始狀態向量為|β0> = |*A*> ⊗ |*B*> 對於圖4.4中的左電路和右電路，其中A∈ {0, 1} and *B* ∈ {0, 1}。具有控制位的第一個CNOT閘的輸出|*A*>和目標位|*B*>在圖4.4的右電路中是|θ1> = |*A*> ⊗ |*A* ⊕ *B*>。接下來，具有控制位的第二CNOT閘的輸出|*A* ⊕ *B*>和目標位|*A*>在圖4.4的右電路中是|θ2> = |*A* ⊕ (*A* ⊕ *B*)> ⊗ |*A* ⊕ *B*> = |*A* ⊕ *A* ⊕ *B*> ⊗ |*A* ⊕ *B*> = |0 ⊕ *B*> ⊗ |*A* ⊕ *B*> = |*B*> ⊗ |*A* ⊕ *B*>。最後，具有控制位的第三CNOT閘的輸出|*B* >和目標位|*A* ⊕ *B*>在圖4.4的右電路中是|θ3> = |*B*> ⊗ |(*A* ⊕ *B*) ⊕ *B* > = |*B*> ⊗ |*A* ⊕ *B* ⊕ *B* > = |*B*> ⊗ |*A* ⊕ 0> = |*B*> ⊗ |*A*>。因為兩個狀態向量|β1> 和 |θ3> 相同，圖4.4的左電路等效於圖4.4的右電路。

乘積表示（4.18）可以輕鬆推斷出實現量子傅立葉變換的非常有效的電路。這樣的電路出現在圖4.5中。

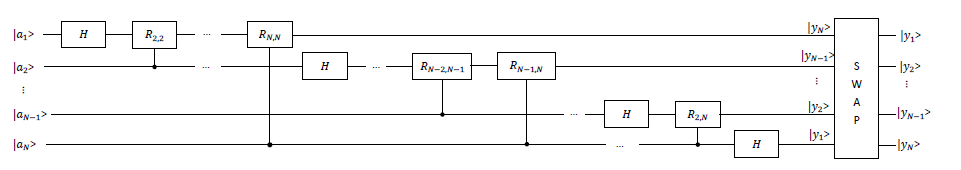


圖4.5：實現量子傅立葉變換的高效電路。

考慮一下當狀態發生了什麼是圖4.5中所示電路的輸入，用於計算量子傅立葉變換。利用Hadamard閘至第一個量子位產生以下狀態。

(4.30)

當*a*1 = 1，我們獲得 = = = = −1。當*a*1 = 0，我們獲得 = = 1。這滿足了Hadamard閘的功能。

接下來，使用受控-*R*2, 2閘產生以下狀態

= = .

(4.31)

當*a*2 = 1相當於控制位|*a*2> to be |1>，它增加了階段

= =

到第一個的係數|1>，當*a*2 = 0相當於控制位 |*a*2> to be |0> 它不會改變第一個的係數 |1> 因為 = = 1。這滿足了受控-*R*2 2閘的功能。

接下來，應用受控-*R*3，3閘產生以下狀態

= = .

當a3 = 1相當於控制位|a3> 成為|1>，它增加了階段 = = 到第一個的係數|1>，當a3 = 0相當於控制位|a3> 成為 |0>， 它不會改變第一個的係數|1>，因為 = = 1。這滿足了受控-R3，3閘的功能。

我們將繼續使用受控的-*R*4, 4, *R*5，5通過*RN* ，N閘，他們隨後將相位()和相位()相加()到第一個

| 1>的係數。在此過程結束時，我們獲得以下狀態

= = . (4.33)

接下來，我們在第二個量子位上完成類似的過程。將Hadamard閘應用到第二個量子位會產生以下狀態

. (4.34)

接下來，通過*RN* − 1，N閘施加受控的-*R*2, 3, *R*3, 4，N個閘產生以下狀態

. (4.35)

我們以這種方式繼續每個量子位，給出最終狀態

… . (4.36)

接下來，應用交換操作反轉量子位的順序。交換操作後，量子位的狀態為

() ⊗ () ⊗ () ⊗ … ⊗ (). (4.37)

與方程式（4.18）和方程式（4.37）比較，我們看一下量子傅立葉變換的期望輸出。這種結構還證明了量子傅立葉變換是unit的，因為圖4.5電路中的每個閘都是unit的。

**4.7評估實現量子傅立葉變換的時間複雜度**

圖4.5中實現量子傅立葉變換的電路使用多少個閘？我們首先通過做一個Hadamard閘和在第一個量子位上進行（n-1）有條件的旋轉來開始。這總共需要n個閘。下一步（第二步）是在第二量子位上進行Hadamard閘和（n-2）有條件的旋轉。這總共需要n +（n-1）個閘。下一步（第三步）是對第三量子位進行Hadamard閘和（n-3）有條件的旋轉。這總共需要n +（n-1+（n-2）個閘。以這種方式繼續進行，總共需要n +（n-1）+（n-2）+…+ 1 = n\*（n +1）/ 2個閘，以及最多n / 2個交換閘，這些閘可將量子位的順序。因為每個交換閘都可以通過使用三個受控非閘來實現，所以圖4.5中的電路提供了O（n2）算法來完成量子傅立葉變換。

快速傅立葉變換是使用O（n applying 2n）閘在2n個元素上計算離散傅立葉變換的最佳經典算法。這就是說，與在量子計算機上實現量子傅立葉變換相比，在數字（經典）計算機上計算離散傅立葉變換需要更多的運算。對於現實世界中的許多應用而言，傅里葉變換是至關重要的一步。計算機語音識別是傅里葉變換最重要的應用之一。在計算機語音識別的音素識別中，第一步是對數字化聲音進行傅立葉變換。我們可以利用量子傅立葉變換來增強這些傅立葉變換的性能嗎？不幸的是，沒有已知的方法可以完成此操作。由於量子計算機中的測量無法直接訪問幅度，因此無法計算原始狀態的傅立葉變換幅度。更糟糕的是，問題在於，通常沒有辦法有效地準備要進行傅立葉變換的原始狀態。

**4.8實現離散傅立葉逆變換的量子逆傅立葉變換**

逆量子傅立葉變換的矩陣**IQFT**與方程式（4.11）中逆離散傅立葉變換的矩陣IDFT相同。因為**IQFT**和**IDFT**是相同的矩陣，並且**IDFT**是引用4-7中的unit矩陣（a算子），所以**IQFT**也是a矩陣（a算子）。逆傅立葉逆變換是對離散傅立葉逆變換的一種非常高效的計算實現，其形式為追溯**IQFT**到其張量積分解。下面，我們取n = 2N，其中N是量子計算機中的量子位數，並且基礎{| 0>，| 1>，| 2>，…，| 2N-1>}是計算基礎。用於量子計算機。我們在這裡提到

() = () = ().

應用 **IQFT**（逆量子傅里葉逆變換）到計算基礎狀態|*a*> for 0 ≤ *a* ≤ (2*N* − 1)

產量

**IQFT** × (|*a*>) = **IQFT** (|*a*>) = () × () = () × (). (4.38)

使用二進製表示形式寫0 ≤ *a* ≤ (2*N* − 1)的計算基礎狀態| a>非常有用*a* = *a*1 *a*2 *a*3 … *aN* = *a*1 × 2*N* − 1 + *a*2 × 2*N* − 2 + *a*3 × 2*N* − 3 + … + *aN* × 20編寫符號0也是非常有用的。a1 a2 a3aN表示二進制分數*a*1 *a*2 *a*3 … *aN* 以下非常有用的乘積表示形式是逆量子傅立葉變換的張量積分解：

**IQFT** (|*a*>) = **IQFT** (|*a*1 *a*2 *a*3 … *aN*>) = () ⊗ () ⊗ () ⊗ … ⊗ (). (4.39)

乘積表示（4.39）實際上是對逆量子傅立葉變換的定義。我們利用以下引理證明了逆量子傅立葉變換的乘積表示（4.39）和定義（4.38）是等效的。

引理4-9：乘積表示（4.39）等同於逆量子傅立葉變換的定義（4.38），並且等於逆量子傅立葉變換的定義。

證明：

因為我們取*n* = 2*N*來使用**IQFT**（逆量子傅立葉變換）來計算0 ≤ *a* ≤ (2*N* − 1)的計算基態| a>，所以逆量子傅立葉變換的定義（4.38）為

**QFT** (|*a*>) = () () = () (). (4.40)

我們使用二進製表示寫出0 ≤ *k* ≤ (2*N* − 1)的計算基礎狀態| k>*k* = *k*1 *k*2 *k*3 … *kN* = *k*1 × 2*N* − 1 + *k*2 × 2*N* − 2 + *k*3 × 2*N* − 3 + … + *kN* × 20。

我們還用記號0表示。*k*1 *k*2 *k*3 … *kN*表示二進制分數*k*1 × 2− 1 + *k*2 × 2− 2 + *k*3 × 2− 3 + … + *kN* × 2−*N*。

除法*k* / 2*N*的計算為*k* / 2*N* = *k*1 *k*2 *k*3 … *kN* / 2*N* = (*k*1 × 2*N* − 1 + *k*2 × 2*N* − 2 + *k*3 × 2*N* − 3 + … + *kN* × 20) / 2*N* = *k*1 × 2−1 + *k*2 × 2−2 + *k*3 × 2−3 + … + *kN* × 2−*N* = ()。

總和的計算將完成2*N*個項目的總和。

的總和的計算也是為了完成2*N*個項目的總和。

如果它們處理相同的項目，則() = () 。因此，我們如下重寫量子逆傅立葉變換的定義（4.40）

**QFT** (|*a*>) = () × (). (4.41)

乘積表示()等於

() ⊗ () ⊗ … ⊗ () = () = () = ().。因此，我們將量子逆傅立葉變換的定義（4.41）重寫如下

**QFT** (|*a*>) = () × () (4.42)

= () × () (4.43)

= () × ()) (4.44)

= () × ()). (4.45)

除法運算(*a* × 2−*l* = *a* / 2*l*)，1 ≤ *l* ≤ *N*是完成l位置向小數點“。”的左移。這表明對於1 ≤ *l* ≤ *N*，我們得到一個*a* × 2−*l* = *a* / 2*l* = *a*1 … *aN* − *l*.*aN* − *l* + 1 *aN*− *l* + 2 … *aN*。

因此，我們得到 = = = ( × ) = (1 × ) = ()。

接下來，我們如下重寫量子逆傅立葉變換的定義（4.45）

**QFT** (|*a*>) = **QFT** (|*a*1 *a*2 *a*3 … *aN*>) = () ⊗ () ⊗ () ⊗ … ⊗ (). (4.46)

因此，從上面的陳述中，我們立即得出乘積表示（4.39）等效於逆量子傅立葉變換的定義（4.38），並且等於逆量子傅立葉變換的定義。

**4.9實現逆量子傅立葉變換的量子電路**

乘積表示（4.39）使得設計實現逆量子傅里葉逆變換的高效電路變得容易。這樣的電路如圖

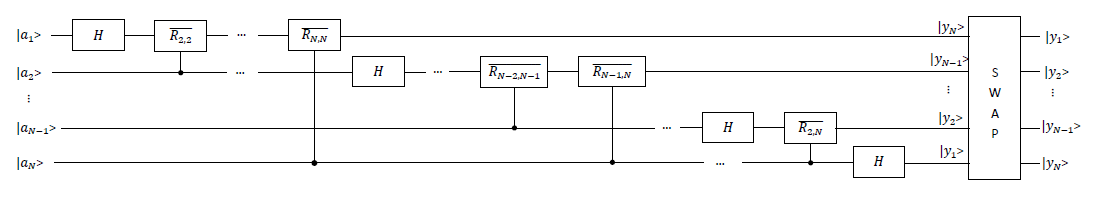


圖4.6：實現逆量子傅立葉變換的高效電路。

4.6。考慮當狀態是圖4.6中所示電路的輸入時，會發生什麼，該電路計算逆量子傅立葉變換。將Hadamard閘應用於第一個量子位會產生以下狀態

(4.47)

當*a*1 = 1時，我們獲得 = = = = −1，當*a*1 = 0時，我們獲得 = = 1。這滿足了Hadamard閘的功能。接下來，使用受控的-閘生成以下狀態

= = .

(4.48)

當*a*2 = 1等於控制位|*a*2>為|1>時，它將相加 = = 到第一個|1>的係數。當|*a*2>等於控制位|*a*2>為| 0>時，它不會更改第一個| 1>的係數，因為 = = 1。這滿足受控-的功能閘。

接下來，利用受控的-閘產生以下狀態

= = . (4.49)

當*a*3 = 1等於控制位| a3>為| 1>時，它將相加

= = 到第一個| 1>的係數。當*a*3 = 0等於控制位|*a*3>為| 0>時，它不會更改第一個| 1>的係數，因為

= = 1。這滿足受控-的功能閘。

我們繼續使用- 至閘，它們分別添加相位()，相位()通過階段 ()到第一個| 1>的係數。在此過程結束時，我們得到以下狀態

= = . (4.50)

接下來，我們在第二個量子位上完成類似的過程。使用Hadamard閘到第二個量子位會產生以下狀態

. (4.51)

接下來，應用受控

- ， 至閘產生以下狀態

. (4.52)

我們以這種方式繼續每個量子位，給出最終狀態

… . (4.53)

接下來，使用交換操作反轉量子位的順序。交換操作後，量子位的狀態為

() ⊗ () ⊗ () ⊗ … ⊗ (). (4.54)

與方程式（4.39）和方程式（4.54）比較，我們查看了逆量子傅立葉變換的期望輸出。這種構造還表明，由於圖4.6電路中的每個閘都是單一的，因此逆量子傅立葉變換是單一的。

**4.10實施逆量子傅立葉變換的時間複雜度評估**

圖4.6中實現逆量子傅立葉變換的電路有多少個閘？我們首先通過做一個Hadamard閘和對第一個量子位進行(*n* − 1)有條件的旋轉來開始。這總共需要n個閘。下一個類似的過程是在第二個量子比特上執行Hadamard閘和(*n* − 2)有條件的旋轉。這總共需要*n* + (*n* − 1)個閘。接下來的類似過程是在第三量子位上進行Hadamard閘和(*n* − 3)有條件的旋轉。這總共需要*n* + (*n* − 1) + (*n* − 2)個閘。以這種方式繼續進行，總共需要*n* + (*n* − 1) + (*n* − 2)個閘，以及最多n / 2個交換閘，這些閘會反轉量子位的順序。

因為應用三個受控NOT閘可以實現每個交換閘，所以圖4.6中的該電路提供了*O*(*n*2)算法來執行逆量子傅立葉變換。找出2*n*個元素上的離散傅立葉逆變換的最佳經典算法是*O*(*n* × 2*n*) 閘的快速傅立葉變換。這表明，與在量子計算機上實現逆傅立葉逆變換相比，在數字（經典）計算機上處理逆離散傅立葉逆變換需要更多的運算。

**4.11計算給定口功能的周期和頻率**

給定的眼功能為：{*a*1 *a*2 *a*3 *a*4 | ∀ *ad* ∈ {0, 1} for 1 ≤ *d* ≤ 4} → { × | *a*4 ∈ {0, 1}}。值( × )是給定口眼的每個輸入*a*1 *a*2 *a*3 *a*4的幅度（權重）功能。輸入*a*1 *a*2 *a*3 *a*4的振幅的絕對值（權重）的平方有可能獲得以輸入a1 a2 a3 a4為輸入值的Of的輸出。絕對值的平方與每個輸入*a*1 *a*2 *a*3 *a*4的幅度（權重）的總和等於1。其中的16個輸出隨後分別從*a*10 *a*20 *a*30 *a*40到 *a*11 *a*21 *a*31 *a*41輸入

(), (), (), (), (), (), (), (), (), (), (), (), (), (), () 和().

周期r滿足任意兩個輸入端*a*1 *a*2 *a*3 *a*4和*a*1 *a*2 *a*3 *a*4 + r的(*a*1 *a*2 *a*3 *a*4 + *r*)= Of(*a*1 *a*2 *a*3 *a*4 + *r*)。 Of的頻率f等於每十六個輸出的周期數。這使*r* × *f* = 16。隱藏的模式和存儲在給定的單眼函數Of中的信息將使其輸出旋轉回其初始值()八次。這意味著每16個輸出的周期數為8，Of的頻率f等於8。因此，這使得Of的周期r為16/8 =2。當Of將兩個輸入*a*1 *a*2 *a*3 *a*4和*a*1 *a*2 *a*3 *a*4 + 2作為其輸入值時，它將對兩個輸入產生相同的輸出。也就是說，Of(*a*1 *a*2 *a*3 *a*4) = = Of(*a*1 *a*2 *a*3 *a*4 + 2）。為了獲得頻率f和Of的周期r，需要對進行至少十六次指數計算並乘以16倍。

**4.11.1給定口腔功能中信號的周期和頻率**

但是，我們可以使用另一種方​​法（第二種方法）獲得給定的眼功能Of的周期r和頻率f。換句話說，值()是每個輸入*a*1 *a*2 *a*3 *a*4的幅度大小（權重）。輸入*a*1 *a*2 *a*3 *a*4的幅值（權重）的絕對值的平方有可能獲得以輸入*a*1 *a*2 *a*3 *a*4為輸入值的Of的輸出。值(2 × π × (1 / 2) × *a*4)是這些輸入幅度之間的相位。相位可以取0到360度之間的任何值。從*a*10 *a*20 *a*30 *a*40到*a*11 *a*21 *a*31 *a*41的每個輸入的相位依次為0°, 180°, 0°, 180°, 0°, 180°, 0°, 180°, 0°, 180°, 0°, 180°, 0°, 180°, 0°和180°。我們將Of的輸入域視為時域，並將其輸出的相位視為信號。計算週期r和Of的頻率f等效於確定時域（輸入域）中信號的周期r和頻率f。

因為從*a*10 *a*20 *a*30 *a*40到*a*11 *a*21 *a*31 *a*41的每個輸入的輸出相位依次為0°, 180°, 0°, 180°, 0°, 180°, 0°, 180°, 0°, 180°, 0°, 180°, 0°, 180°, 0° 和 180°，我們將16個輸入值作為相應的16個時間單位，將16個相位作為16個信號樣本。每個樣本編碼一個角度。角度可以為0度或180度。從*a*10 *a*20 *a*30 *a*40到*a*11 *a*21 *a*31 *a*41的十六個輸入值對應於從零到十五的十六個時間單位。我們使用圖4.7解釋了為什麼計算Of的周期r和頻率f等於確定時域（輸入域）中信號的周期r和頻率f的原因。在圖4.7中，水平軸代表時域，其中包含輸入域，垂直軸代表信號，其中包含來自輸出的16個相位。從圖4.7可以看出，信號旋轉了八次回到其初始值0°也就是說，每十六個時間單位有八個信號周期，信號頻率f等於八個。這樣得出信號的周期r等於（16/8）=（2）。因為到每個輸出的大小相同並且等於()並且信號（到的每個輸出的相位）旋轉回到其初始值0°八次，所以它的輸出旋轉八次回到其初始值()。這表明每十六個輸出的周期數為八，的頻率f等於八。因此，得出的周期r為16/8 = 2。

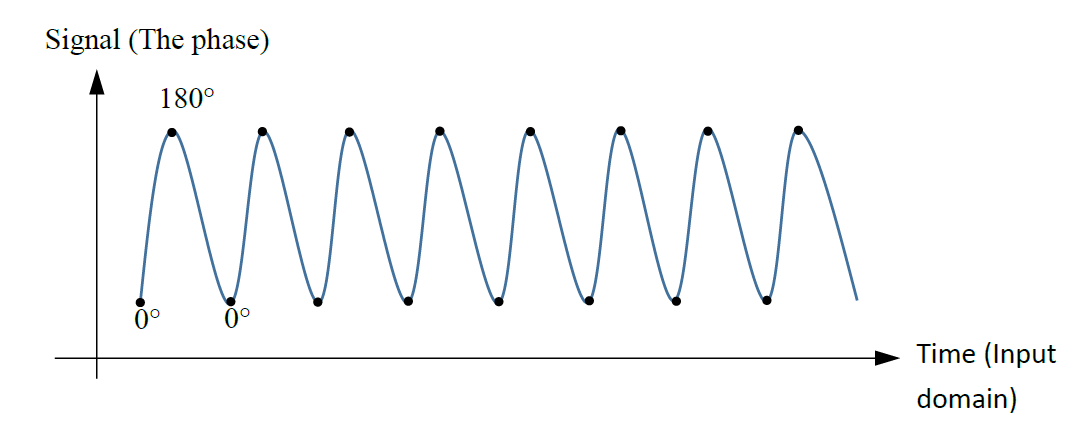


圖4.7：從給定的口功能的輸出的16個相位中採樣16個點，其中包括：{*a*1 *a*2 *a*3 *a*4 | ∀ *ad* ∈ {0, 1} for 1 ≤ *d* ≤ 4} → { × | *a*4 ∈ {0, 1}}。

**4.11.2在給定的眼功能中代表信號的周期和頻率的圓圈符號**

因為在4.11.1小節的圖4.7中，採樣16個點僅對Of的16個輸出進行了16個相位的編碼，因此我們使用圓圈符號（另一個概念）來解釋如何找出週期r和Of的頻率f等於確定週期r和時域（輸入域）中信號的頻率f。在一個圓中，實心半徑表示輸入*a*1 *a*2 *a*3 *a*4的幅度大小。這意味著圓的大小（陰影區域）與輸入*a*1 *a*2 *a*3 *a*4的幅度的絕對值的平方成正比。這意味著圓的大小（陰影區域）與以輸入*a*1 *a*2 *a*3 *a*4作為輸入值獲得Of的輸出的可能性成正比。圓圈中繪製的較深的線表示相位（正角）使圓圈逆時針旋轉或相位（負角）使圓圈順時針旋轉。圓圈下面的數字*a*1 *a*2 *a*3 *a*4編碼到Of的輸入。在圖4.8中，它包含給定口功能的十六個輸出，其中包括：{*a*1 *a*2 *a*3 *a*4 | ∀ *ad* ∈ {0, 1} for 1 ≤ *d* ≤ 4} → { × | *a*4 ∈ {0, 1}}。在圖4.8中，十六個圓編碼了圖4.7中的採樣十六個點，每個圓下面的十六個數字編碼了圖4.7時域的十六個時間單位。

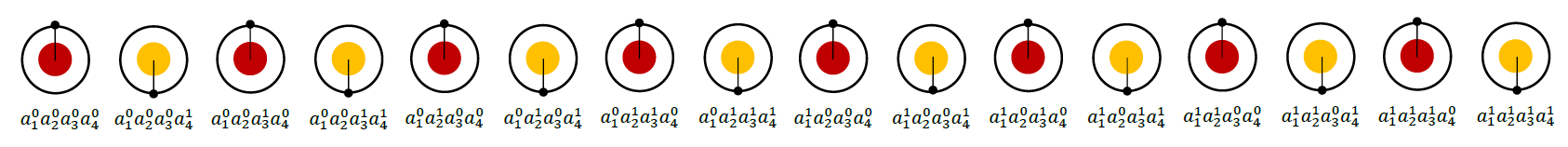


圖4.8：給定的口功能的十六個輸出，其中包括：{*a*1 *a*2 *a*3 *a*4 | ∀ *ad* ∈ {0, 1} for 1 ≤ *d* ≤ 4} → { × | *a*4 ∈ {0, 1}}。

因為在圖4.8中每個圓的陰影區域與()2成正比，所以每個圓的陰影區域是相同的。在圖4.8中，左第一個圓的半徑為() = (1 / 4)，即向(*a*10 *a*20 *a*30 *a*40) 。輸出的大小。在左第一個圓中繪製的較暗線表示(*a*10 *a*20 *a*30 *a*40)的輸出相位為0°，並向左第一個圓旋轉0°。左第一個圓圈下方的數字*a*10 *a*20 *a*30 *a*40對(*a*10 *a*20 *a*30 *a*40)。接受的輸入進行編碼。類似地，在圖4.8中，左第二個圓的半徑為() = (1 / 4)，即向(*a*10 *a*20 *a*30 *a*41) 。輸出的大小。在左第二個圓中繪製的較深的線表示(*a*10 *a*20 *a*30 *a*41)的輸出相位為180°，並向左第二個圓旋轉180°。左第二個圓圈下方的數字*a*10 *a*20 *a*30 *a*41對(*a*10 *a*20 *a*30 *a*41) 。接受的輸入進行編碼。類似地，在圖4.8中，左第三個圓到最後一個圓的半徑均為() = (1 / 4)，即從(*a*10 *a*20 *a*31 *a*40)的輸出量的(*a*11 *a*21 *a*31 *a*41)。在左第三個圓圈到最後一個圓圈之間繪製的較暗的線表示，(*a*10 *a*20 *a*31 *a*40)到(*a*11 *a*21 *a*31 *a*41)的輸出相位依次為0°, 180°, 0°, 180°, 0°, 180°, 0°, 180°, 0°, 180°, 0°, 180°, 0°和180。隨後，它們將0旋轉和180°旋轉7次，直到最後一個圓向左第三個圓旋轉。在最後一個圓左下方的第三個圓圈下方的十四個數字*a*10 *a*20 *a*31 *a*40到*a*11 *a*21 *a*31 *a*41編碼十四個輸入，隨後由(*a*10 *a*20 *a*31 *a*40)到(*a*11 *a*21 *a*31 *a*41)進行輸入。

從圖4.8可以看出，在十六個圓（採樣十六個點）的信號中存儲的隱藏模式和信息是信號（相位）旋轉回其初始值0°八次。這表明每16個輸入（每16個時間單位）就有8個信號周期，信號的頻率f等於8。這樣得出信號的周期r等於（16/8）=（2）。由於信號（到每個輸出的相位）會旋轉八次回到其初始值0°，因此其輸出會旋轉八次回到其初始值()。這意味著每16個輸出的周期數為8，Of的頻率f等於8。因此，這使得Of的周期r為16/8 =2。因此，當給定的單眼函數Of將兩個輸入*a*1 *a*2 *a*3 *a*4和*a*1 *a*2 *a*3 *a*4 + 2作為其輸入值時，它將給兩個輸入。這表明到任意兩個輸入端*a*1 *a*2 *a*3 *a*4和*a*1 *a*2 *a*3 *a*4 + 2的Of *a*1 *a*2 *a*3 *a*4= Of *f*(*a*1 *a*2 *a*3 *a*4 + 2)。其中，它只需要實現八個乘法(2 × π × (1 / 2) × 1) (180°)和八個乘法(2 × π × (1 / 2) × 0) (0°)。第二種方法極大地增強了第一種方法確定Of的周期r和頻率f的性能。

**4.11.3量子程序的第一階段，用於查找給定的眼功能中信號的周期和頻率**

在清單4.1中，該程序位於後端，它是Open QASM的模擬器，在IBM的量子計算機中具有32個量子位。該程序將確定頻率f和Of的周期r，以便對任意兩個輸入(*a*1 *a*2 *a*3 *a*4)和(*a*1 *a*2 *a*3 *a*4 + *r*)的Of(*a*1 *a*2 *a*3 *a*4)= Of(*a*1 *a*2 *a*3 *a*4 + *r*)。在清單4.1中，我們介紹瞭如何使用逆傅立葉逆變換來找到頻率f和Of的周期r。圖4.9是計算Of的頻率f和周期r的量子電路。聲明“ OPENQASM 2.0；”清單4.1的第一行指出該程序是使用Open QASM的2.0版編寫的。接下來，聲明“包括“ qelib1.inc”；”清單4.1的第二行將繼續解析文件“ qelib1.inc”，就好像文件的內容粘貼在include語句的位置一樣，其中文件“ qelib1.inc”是**Quantum Experience（QE）**標準標頭並相對於當前工作目錄指定路徑。

|  |
| --- |
| 1. OPENQASM 2.0; 2. include "qelib1.inc"; 3. qreg q[4]; 4. creg c[4]; |

清單4.1：確定給定的眼功能的頻率f和周期r的程序其中：{*a*1 *a*2 *a*3 *a*4 | ∀ *ad* ∈ {0, 1} for 1 ≤ *d* ≤ 4} → { × | *a*4 ∈ {0, 1}}。

接下來，聲明“ qreg q [4];”清單4.1第3行上的聲明是在程序中有四個量子位。在圖4.9的左上方，四個量子位分別是q [0]，q [1]，q [2]和q [3]。每個量子位的初始值設置為狀態| 0>。我們使用四個量子比特q [0]，q [1]，q [2]和q [3]來編碼輸入域{*a*1 *a*2 *a*3 *a*4 | ∀ *ad* ∈ {0, 1} for 1 ≤ *d* ≤ 4}的。也就是說，量子位q [0]編碼位a1，量子位q [1]編碼位a2，量子位q [2]編碼位a3，量子位q [3]編碼位a4。

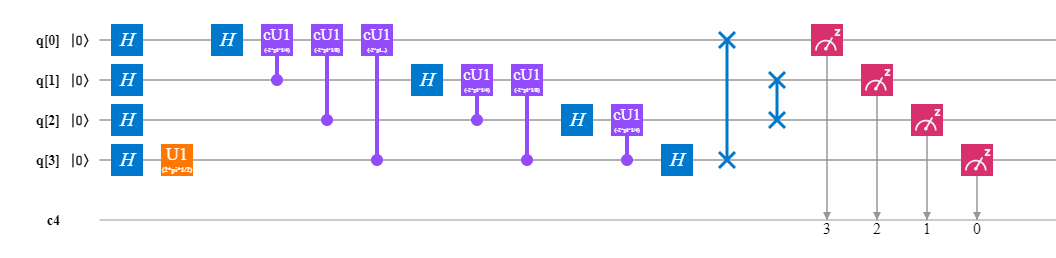


圖4.9：計算給定的眼功能的頻率f和周期r的量子電路，其中：{*a*1 *a*2 *a*3 *a*4 | ∀ *ad* ∈ {0, 1} for 1 ≤ *d* ≤ 4} → { × | *a*4 ∈ {0, 1}}。

為了方便我們的解釋，對於0 ≤ *k* ≤ 3的q[k]0表示q [k]的值0，對於0 ≤ *k* ≤ 3的q [k] 1表示q [k]的值1。 k]。同樣，為便於說明，確定頻率f和Of的周期r的初始狀態向量，以便對任意兩個輸入a1 a2 a3進行*Of*(*a*1 *a*2 *a*3 *a*4) = *Of*(*a*1 *a*2 *a*3 *a*4 + *r*)和*a*1 *a*2 *a*3 *a*4 + *r*為

|Ω0> = |q[0]0> |q[1]0> |q[2]0> |q[3]0> = |0> |0> |0> |0> = |0000>。

初始狀態向量|Ω0>的相應十進制值為23 × q[0]0 + 22 × q[1]0 + 21 × q[2]0 + 20 × q[3]0。這意味著量子位q[0]0是最高有效位，量子位q[3]0是最低有效位。然後，聲明“ creg c [4];”清單4.1的第四行聲明該程序中有四個經典位。在圖4.9的左下角，四個經典位依次為c [0]，c [1]，c [2]和c [3]。每個經典位的初始值都設置為零（0）。

為了方便我們的解釋，對於0 ≤ *k* ≤ 3的c[k]0表示c [k]的值0，對於0 ≤ *k* ≤ 3的c [k] 1表示c [k]的值1。c[k]。四個初始古典位c[3]0 c[2]0 c[1]0 c[0]0的對應十進制值為23 × c[3]0 + 22 × c[2]0 + 21 × c[1]0 + 20 × c[0]0。這表明經典位c[3]0是最高有效位，經典位c[0]0最低有效位。

接下來，四個語句““h q[0];”, “h q[1];” “h q[2];”和““h q[3];”清單4.1的第5至第8行中的第一個時隙將實現四個Hadamard閘

|  |
| --- |
| **Listing 4.1 continued…**  // We use the following *five* statements to implement a given oracular function *Of*:  //{*a*1 *a*2 *a*3 *a*4 | ∀ *ad* ∈ {0, 1} for 1 ≤ *d* ≤ 4} → { × | *a*4 ∈ {0, 1}}.  5. h q[0];  6. h q[1];  7. h q[2];  8. h q[3];  9. u1(2\*pi\*1/2) q[3]; |

圖4.9中的量子電路圖。四個語句“h q[0];”, “h q[1];” “h q[2];”和“h q[3];”將初始狀態向量|Ω0> = |q[0]0> |q[1]0> |q[2]0> |q[3]0>作為它們的輸入狀態向量。因為每個量子位的初始狀態都設置為狀態| 0>，所以這四個語句“h q[0];”, “h q[1];” “h q[2];”和“h q[3];”實際實現 × = = = ( + ) = (|0> + |1>)。也就是說，這四個語句將四個量子位q[0], q[1], q[2]和q[3]從一種狀態| 0>轉換為另一種狀態 (|0> + |1>)（它們的疊加）。因此，四個量子位q[0], q[1], q[2]和q[3]的疊加為( (|0> + |1>)) ( (|0> + |1>)) ( (|0> + |1>)) ( (|0> + |1>))。這意味著我們獲得以下新的狀態向量

|Ω1> = ( (|q[0]0> + |q[0]1>)) ( (|q[1]0> + |q[1]1>)) ( (|q[2]0> + |q[2]1>))

( (|q[3]0> + |q[3]1>)).

接下來，聲明““u1(2\*pi\*1/2) q[3];”清單4.1中第9行的代碼實際上實現了圖4.9中量子電路第二個時隙的一個旋轉閘。語句“ “u1(2\*pi\*1/2) q[3];”將新的狀態向量(|Ω1>)作為其輸入狀態向量。因為量子位q [3]的狀態為( (|q[3]0> + |q[3]1))，所以語句“u1(2\*pi\*1/2) q[3];”實際完成

“u1(2\*pi\*1/2) q[3];” actually completes × = = = ( + ) = ( + ) = (|0> + |1>) = (|0> + |1>) = (|0> + (−1) |1>).

這表示語句“u1(2\*pi\*1/2) q[3];”相加 = = cos(π) + × sin(π) = −1 + × 0 = −1表示量子位q [3]的疊加態| 1>的係數，並且不改變量子疊加q的態| 0>的係數q [3]位。因為在圖4.9中的量子電路的第二個時隙中，沒有量子閘作用於量子位q [0]至q [2]，所以它們的當前狀態不變。這就是說，我們獲得以下新的狀態向量

|Ω2> = ( (|q[0]0> + |q[0]1>)) ( (|q[1]0> + |q[1]1>)) ( (|q[2]0> + |q[2]1>))

( (|q[3]0> + |q[3]1>))

= ( (|q[0]0> + |q[0]1>)) ( (|q[1]0> + |q[1]1>)) ( (|q[2]0> + |q[2]1>))

( (|q[3]0> + (−1) |q[3]1>))

= (|q[0]0> |q[1]0> |q[2]0> |q[3]0> + |q[0]0> |q[1]0> |q[2]0>|q[3]1> +

|q[0]0> |q[1]0> |q[2]1> |q[3]0> + |q[0]0> |q[1]0> |q[2]1>|q[3]1> +

|q[0]0> |q[1]1> |q[2]0> |q[3]0> + |q[0]0> |q[1]1> |q[2]0>|q[3]1> +

|q[0]0> |q[1]1> |q[2]1> |q[3]0> + |q[0]0> |q[1]1> |q[2]1>|q[3]1> +

|q[0]1> |q[1]0> |q[2]0> |q[3]0> + |q[0]1> |q[1]0> |q[2]0>|q[3]1> +

|q[0]1> |q[1]0> |q[2]1> |q[3]0> + |q[0]1> |q[1]0> |q[2]1>|q[3]1> +

|q[0]1> |q[1]1> |q[2]0> |q[3]0> + |q[0]1> |q[1]1> |q[2]0>|q[3]1> +

|q[0]1> |q[1]1> |q[2]1> |q[3]0> + |q[0]1> |q[1]1> |q[2]1>|q[3]1>)

= (|q[0]0> |q[1]0> |q[2]0> |q[3]0> + (−1) |q[0]0> |q[1]0> |q[2]0> |q[3]1> +

|q[0]0> |q[1]0> |q[2]1> |q[3]0> + (−1) |q[0]0> |q[1]0> |q[2]1> |q[3]1> +

|q[0]0> |q[1]1> |q[2]0> |q[3]0> + (−1) |q[0]0> |q[1]1> |q[2]0> |q[3]1> +

|q[0]0> |q[1]1> |q[2]1> |q[3]0> + (−1) |q[0]0> |q[1]1> |q[2]1> |q[3]1> +

|q[0]1> |q[1]0> |q[2]0> |q[3]0> + (−1) |q[0]1> |q[1]0> |q[2]0> |q[3]1> +

|q[0]1> |q[1]0> |q[2]1> |q[3]0> + (−1) |q[0]1> |q[1]0> |q[2]1> |q[3]1> +

|q[0]1> |q[1]1> |q[2]0> |q[3]0> + (−1) |q[0]1> |q[1]1> |q[2]0> |q[3]1> +

|q[0]1> |q[1]1> |q[2]1> |q[3]0> + (−1) |q[0]1> |q[1]1> |q[2]1> |q[3]1>).

在新的狀態向量(|Ω2>)中，從狀態|q[0]0> |q[1]0> |q[2]0>|q[3]0>到狀態|q[0]1> |q[1]1> |q[2]1>|q[3]1>隨後是(), (), (), (), (), (), (), (), (), (), (), (), (), (), ()和()。這就是說，在新的狀態向量(|Ω2>)中，它使用每個狀態的幅度對給定的眼功能Of的十六個輸出進行編碼：{*a*1 *a*2 *a*3 *a*4 | ∀ *ad* ∈ {0, 1} for 1 ≤ *d* ≤ 4} → { × | *a*4 ∈ {0, 1}}。存儲在新狀態向量(|Ω2>)中的隱藏模式和信息將使振幅旋轉八次回到其初始值()。

類似地，在新的狀態向量(|Ω2>)中，它將每個狀態的幅度的大小() = (1 /4)用作圖中每個圓的半徑4.8。因為在圖4.8中每個圓圈的陰影區域與(1 / 4)2成正比，所以每個圓圈的陰影區域是相同的。在新的狀態向量(|Ω2>)中，從狀態|q[0]0> |q[1]0> |q[2]0> |q[3]0>到狀態|q[0]1> |q[1]1> |q[2]1> |q[3]1>隨後為0°, 180°, 0°, 180°, 0°, 180°, 0°, 180°, 0°, 180°, 0°, 180°, 0°, 180°, 0°，180°, 0°和180°。隨後，它們向左第一個圓到圖4.8中的最後一個圓進行0°旋轉和180°旋轉八次。在新的狀態向量(|Ω2>)中，它使用在圖4.8的左第一個圓到最後一個圓之間繪製的暗線來指示0 a旋轉和180°旋轉八次到圖16中的十六個圓4.8。這就是說，存儲在新狀態向量(|Ω2>)中的隱藏模式和信息是指相位旋轉八次回到其初始值0°。

**4.11.4量子程序中的逆量子傅立葉變換給定口功能中信號的周期和頻率**

接下來，清單4.1中從第10行到第21行的十二個語句實現了具有四個量子位的逆量子傅立葉變換。語句“ h q [0];”

|  |
| --- |
| **Listing 4.1 continued…**  // We use the following *twelve* statements to implement the inverse quantum  // Fourier transform with four quantum bits.   1. h q[0]; 2. cu1(-2\*pi\*1/4) q[1],q[0]; 3. cu1(-2\*pi\*1/8) q[2],q[0]; 4. cu1(-2\*pi\*1/16) q[3],q[0]; 5. h q[1]; 6. cu1(-2\*pi\*1/4) q[2],q[1]; 7. cu1(-2\*pi\*1/8) q[3],q[1]; |

清單4.1中第10行上的第一個示例在圖4.9的第三個時隙中實現了一個Hadamard閘。它以新的狀態向量|Ω2>作為其輸入狀態向量。因為|Ω2>中量子位q [0]的當前狀態為( (|q[0]0> + |q[0]1>))，所以語句“ h q [0];”清單4.1中第10行上的代碼實際上實現了 × = = |0>。這表明語句“ h q [0];”將量子位q [0]從一種狀態( (|q[0]0> + |q[0]1>))（其疊加）轉換為另一種狀態|q[0]0>。因為在圖4.9中的量子電路的第三個時隙中，沒有量子閘作用於量子位q [1]至q [3]，所以它們的當前狀態不變。這就是說，我們獲得以下新的狀態向量

|Ω3> = (|q[0]0>) ( (|q[1]0> + |q[1]1>)) ( (|q[2]0> + |q[2]1>)) ( (|q[3]0> + (−1)

|q[3]1>)).

接下來，聲明“cu1(-2\*pi\*1/4) q[1],q[0];”清單4.1中第11行上的是受控旋轉閘e 。控制位是量子位q [1]，目標位是量子位q [0]。如果控制位是| 1>並且目標位是| 1>，則將相位添加到狀態的| 1>的係數中目標位。否則，它不會更改目標位。語句“cu1(-2\*pi\*1/4) q[1],q[0];”清單4.1中第11行上的“行”將新的狀態向量|| 3>作為其輸入狀態向量，並在圖4.9的第四個時隙中實現了一個受控的旋轉閘。因為目標位q [0]的狀態為(|q[0]0>)，所以語句“cu1(-2\*pi\*1/4) q[1],q[0];”不會更改目標位q [0]的狀態(|q[0]0>)。在圖4.9中的量子電路的第四個時隙中，沒有量子閘可作用於量子位q [2]至q [3]，它們的當前狀態不變。因此，我們獲得以下新的狀態向量

|Ω4> = (|q[0]0>) ( (|q[1]0> + |q[1]1>)) ( (|q[2]0> + |q[2]1>)) ( (|q[3]0> + (−1)

|q[3]1>)).

接下來，聲明““cu1(-2\*pi\*1/8) q[2],q[0];” 清單4.1中第12行上的是一個受控旋轉閘。控制位是量子位q [2]，目標位是量子位q [0]。如果控制位是| 1>並且目標位是| 1>，則將相位加到狀態的| 1>的係數中目標位。否則，它不會更改目標位。語句“cu1(-2\*pi\*1/8) q[2],q[0];”清單4.1中第12行上的代碼採用新的狀態向量|Ω4>作為其輸入狀態向量，並在圖4.9的第五個時隙中實現了一個受控的旋轉閘。因為目標位q [0]的狀態為(|q[0]0>)，所以語句“cu1(-2\*pi\*1/8) q[2],q[0];”不會更改目標位q [0]的狀態(|q[0]0>)。在圖4.9中的量子電路的第五個時隙中，沒有量子閘可作用於量子位q [1]和q [3]，它們的當前狀態不變。這表明我們獲得了以下新的狀態向量

|Ω5> = (|q[0]0>) ( (|q[1]0> + |q[1]1>)) ( (|q[2]0> + |q[2]1>)) ( (|q[3]0> + (−1)

|q[3]1>)).

接下來，聲明“cu1(-2\*pi\*1/16) q[3],q[0];”清單4.1中第13行上的是受控旋轉閘。控制位是量子位q [3]，目標位是量子位q [0]。如果控制位是| 1>並且目標位是| 1>，則它將相位添加到狀態的| 1>的係數中目標位。否則，它不會更改目標位。語句“cu1(-2\*pi\*1/16) q[3],q[0];” 清單4.1中第13行上的“行”將新的狀態向量|| 5>作為其輸入狀態向量，並在圖4.9的第六個時隙中實現了一個受控的旋轉閘。因為目標位q [0]的狀態為(|q[0]0>)，所以語句“cu1(-2\*pi\*1/16) q[3],q[0];”不會更改目標位q [0]的狀態(|q[0]0>)。在圖4.9中的量子電路的第六個時隙中，沒有量子閘可作用於量子位q [1]和q [2]，它們的當前狀態不變。這意味著我們獲得以下新的狀態向量

|Ω6> = (|q[0]0>) ( (|q[1]0> + |q[1]1>)) ( (|q[2]0> + |q[2]1>)) ( (|q[3]0> + (−1)

|q[3]1>)).

接下來，聲明“ h q [1];”清單4.1中的第14行上的圖9在圖4.9的第七個時隙中完成了一個Hadamard閘。它將新的狀態向量q[1] in |Ω6>作為其輸入狀態向量。因為|Ω6>中量子位q [1]的當前狀態為( (|q[1]0> + |q[1]1>))，所以語句“ h q [1];”清單4.1中第14行上的代碼實際上實現了 × = = |0>。這意味著語句“ h q [1];”將量子位q [1]從一種狀態( (|q[1]0> + |q[1]1>))（其疊加）轉換為另一種狀態| q [1] 0>。因為在圖4.9中的量子電路的第七個時隙中，沒有量子閘可作用於量子位q [0]，q [2]和q [3]，所以它們的當前狀態不變。這表明我們獲得了以下新的狀態向量

|Ω7> = (|q[0]0>) (|q[1]0>) ( (|q[2]0> + |q[2]1>)) ( (|q[3]0> + (−1) |q[3]1>)).

接下來，聲明“cu1(-2\*pi\*1/4) q[2],q[1];” 清單4.1中第15行上的是一個受控旋轉閘。控制位是量子位q [2]，目標位是量子位q [1]。如果控制位是| 1>並且目標位是| 1>，則將相位添加到狀態的| 1>的係數中目標位。否則，它不會更改目標位。語句“cu1(-2\*pi\*1/4) q[2],q[1];”清單4.1中第15行上的“行”將新的狀態向量|Ω7>作為其輸入狀態向量，並在圖4.9的第八個時隙中實現了一個受控的旋轉閘。因為目標位q [1]的狀態為(|q[1]0>)，所以語句“cu1(-2\*pi\*1/4) q[2],q[1];”不會更改目標位q [1]的狀態(|q[1]0>)。在圖4.9中的量子電路的第八個時隙中，沒有量子閘作用於量子位q [0]和q [3]，它們的當前狀態不變。因此，我們獲得以下新的狀態向量

|Ω8> = (|q[0]0>) (|q[1]0>) ( (|q[2]0> + |q[2]1>)) ( (|q[3]0> + (−1) |q[3]1>)).

接下來，聲明“cu1(-2\*pi\*1/8) q[3],q[1];”清單4.1中第16行上的是受控旋轉閘。控制位是量子位q [3]，目標位是量子位q [1]。如果控制位是| 1>並且目標位是| 1>，則將相位加到狀態的| 1>的係數中目標位。否則，它不會更改目標位。語句“cu1(-2\*pi\*1/8) q[3],q[1];” 清單4.1中第16行上的“行”將新的狀態向量|Ω8>作為其輸入狀態向量，並在圖4.9的第九個時隙中實現了一個受控的旋轉閘。因為目標位q [1]的狀態為(|q[1]0>)，所以語句“cu1(-2\*pi\*1/8) q[3],q[1];”不會更改目標位q [1]的狀態(|q[1]0>)。在圖4.9中的量子電路的第九個時隙中，沒有量子閘可作用於量子位q [0]和q [2]，它們的當前狀態不變。這表明我們獲得了以下新的狀態向量

|Ω9> = (|q[0]0>) (|q[1]0>) ( (|q[2]0> + |q[2]1>)) ( (|q[3]0> + (−1) |q[3]1>)).

接下來，聲明“ h q [2];”清單4.1中的第17行上的代碼在圖4.9的第十個時隙中執行一個Hadamard閘。它以新的狀態向量|Ω9>作為輸入狀態

|  |
| --- |
| **Listing 4.1 continued…**   1. h q[2]; 2. cu1(-2\*pi\*1/4) q[3],q[2]; 3. h q[3]; 4. swap q[0],q[3]; 5. swap q[1],q[2]; |

向量。因為|Ω9>中量子位q [2]的當前狀態為( (|q[2]0> + |q[2]1>))，所以語句“ h q [2];”清單4.1中第17行上的代碼實際上實現了 × = = |0>。這就是說語句“ h q [2];”將量子位q [2]從一種狀態( (|q[2]0> + |q[2]1>))（其疊加）轉換為另一種狀態|q[2]0>。因為在圖4.9中的量子電路的第十個時隙中，沒有量子閘作用於量子位q [0]，q [1]和q [3]，所以它們的當前狀態不變。這就是說，我們獲得以下新的狀態向量

|Ω10> = (|q[0]0>) (|q[1]0>) (|q[2]0>) ( (|q[3]0> + (−1) |q[3]1>)).

接下來，聲明“ cu1（-2 \* pi \* 1/4）q [3]，q [2];”清單4.1中的第18行是

受控旋轉閘。控制位是量子位q [**3**]，目標位是量子位q [**2**]。如果控制位是| 1>，而目標位是| 1>，則將相位添加到狀態的| 1>的係數中目標位。否則，它不會更改目標位。語句*“****cu1(-2\*pi\*1/4) q[3],q[2]****;”****清單4.1中第18行***上的“行”將新的狀態向量***|Ω10>***作為其輸入狀態向量，並在圖4.9的量子電路的第***11***個時隙中實現了一個受控的旋轉閘。因為***目標位q [2]***的狀態為(|q[2]0>)，所以語句“***cu1(-2\*pi\*1/4) q[3],q[2];****”*不會更改***目標****位****q [2]***的狀態(|q[2]0>)。在圖4.9中的量子電路的第***11***個時隙中，沒有量子閘可作用於量子位***q [0]和q [1]***，它們的當前狀態不變。因此，我們獲得以下新的狀態向量

***|Ω11>*** = (|q[0]0>) (|q[1]0>) (|q[2]0>) ( (|q[3]0> + (−1) |q[3]1>))。

接下來，聲明***“h q[3];”***清單4.1中的第***19***行上的圖4.9在圖4.9量子電路的第***十二***個時隙中實現了一個Hadamard閘。它以新的狀態向量***|Ω11>***作為其輸入狀態向量。因為***|Ω11>***中量子位***q[3]***的當前狀態為( (***|q[3]0>*** + (−1) ***|q[3]1>***))，所以語句“ ***h q[3];”***清單4.1中第***19***行上的***代碼***實際上實現了 × = = |1>。這**表明**語句“ ***h q[3];”***將量子位***q[3]***從一種狀態( (***|q[3]0>*** + (−1) ***|q[3]1>***))轉換為另一種狀態***|q[3]1>***。因為在圖4.9中的量子電路的第***十二***個時隙中，沒有量子閘作用於量子位***q [0]，q [1]和q [2]***，所以它們的當前狀態不變。這意味著我們獲得以下新的狀態向量

***|Ω12>*** = (|q[0]0>) (|q[1]0>) (|q[2]0>) (|q[3]1>)。

接下來，聲明***“swap q[0],q[3];”***清單4.1中第20行的是交換閘，用於交換包含在其中的信息兩個量子位q[0] 和 q[3]。它以新的狀態矢量|Ω12>作為其輸入狀態矢量，並在圖4.9的***量子電路***的第十三時隙中實現一個交換閘。因為在圖4.9中的量子電路的第***十三***時隙中，沒有量子閘作用於量子位***q[1] 和 q[2]***，所以它們的當前狀態不變。因此，在聲明***“swap q[0],q[3];”***之後在清單4.1中的第20行，我們獲得以下新的狀態向量

***|Ω13> = (|q[0]1>)*** (|q[1]0>) (|q[2]0>) ***(|q[3]0>)***。

接下來，聲明“swap q[1],q[2];”清單4.1中第***21***行的是交換閘，用於交換包含在其中的信息兩個量子位***q [1]和q [2]***。它以新的狀態向量***|Ω13>***作為其輸入狀態向量，並在圖4.9的***量子電路***的第***14***個時隙中實現一個交換閘。因為在圖4.9中的量子電路的第14個時隙中，沒有量子閘可作用於量子位***q[0] 和 q[3]***，所以它們的當前狀態不變。因此，在聲明“swap q[1],q[2];”之後在清單4.1中的第***21***行，我們獲得以下新的狀態向量

***|Ω14> = (|q[0]1>)*** (|q[1]0>) (|q[2]0>) ***(|q[3]0>)***

***4.11.5在量子程序中進行測量*，以讀取Given Oracular Function中信號的周期和頻率**

量子位q[0]是最高有效位，量子位q[3]是最低有效位。經典位c[3]是最高有效位，經典位c[0]是最高有效位

|  |
| --- |
| Listing 4.1 continued…   1. measure q[0] -> c[3]; 2. measure q[1] -> c[2]; 3. measure q[2] -> c[1]; 4. measure q[3] -> c[0]; |

最低有效位。因此，有四個語句“***measure q[0] -> c[3];***”，“***measure q[1] -> c[2];***”，“***measure q[2] -> c[1];***”。和“***measure q[3] -> c[0];***”從清單4.1中的第22行到第25行，從最高有效量子位q[3]到最高有效量子位q[0]。他們通過覆蓋最高有效經典位c[3]至最低有效經典位c[0]記錄測量結果。他們完成了圖4.9中從量子電路的第***十五***個時隙到第***十八***個時隙的測量。

在後端是IBM量子計算機中具有***32***個量子位的***Open QASM模擬器***，我們使用命令“ ***run***”執行清單***4.1***中的程序。測量結果如圖***4.10***所示。從圖***4.10***中，我們***得出***結果1000 (c[3] = q[0] = |1>, c[2] = q[1] = |0>, c[1] = q[2] = |0> and c[0] = q[3] = |0>)，概率為1（100％）。就是說，在可能性為1（100％）的情況下，我們獲得了量子位***q[0] 的值 |1>***,，量子位***q[1]的值 |0>***，量子位***q[2] 的值為 |0>***，量子位***q[3] 的值為 |0>***。測得的結果1000（八）的概率為1（100％）表示對於given oracular function *Of*: {**a1 a2 a3 a4 | ∀ ad ∈** {0, 1} for 1 ≤ *d* ≤ 4} → { × **| a4** ∈ {0, 1}}，其輸出旋轉八次回到其初始值()，並且其輸出的相位旋轉八次回到其初始值0°。這意味著***每16個輸出的周期數為8***，*Of*的頻率f等於8。因此，我們得出*Of*的周期r為(16 / 8) = 2，因此對於任何兩個輸入**a1 a2 a3 a4 和 a1 a2 a3 a4 + 2的Of(a1 a2 a3 a4) = Of(a1 a2 a3 a4 + 2)**

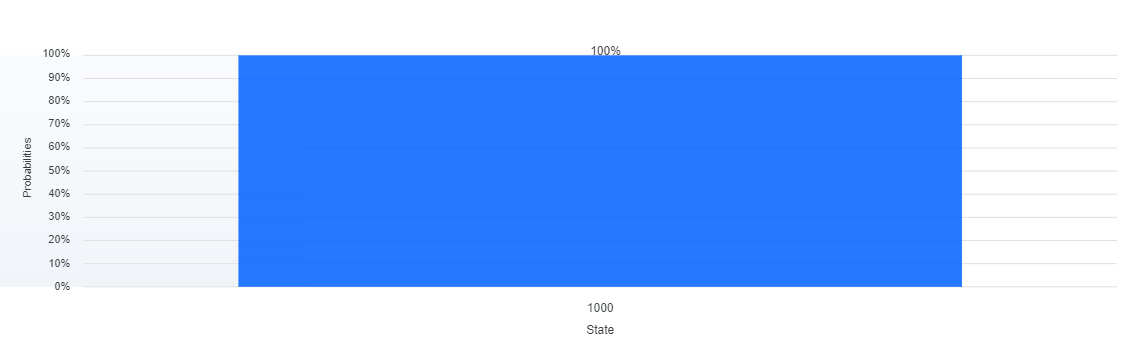


圖4.10：***對於given oracular function Of，信號頻率為每個具有四個量子位的量子寄存器的信號周期數為1000***，概率為1（100％），{**a1 a2 a3 a4 | ∀ ad ∈** {0, 1} for 1 ≤ *d* ≤ 4} → { × **| a4** ∈ {0, 1}}.

***4.11.6逆量子傅立葉變換在Given Oracular Function中尋找信號的周期和頻率的功效***

在清單4.1中從第5行到第9行的5條語句之後，對圖4.7中的16個點進行採樣對given oracular function *Of*的輸出的16個相位進行編碼：{**a1 a2 a3 a4 | ∀ ad ∈** {0, 1} for 1 ≤ *d* ≤ 4} → { × **| a4** ∈ {0, 1}}.。接下來，在清單4.1中從第10行到第21行的十二個語句之後，具有四個量子位q[0], q[1], q[2] 和 q[3]的量子狀態向量對信號的頻率進行編碼，並且信號頻率的強度。接下來，在清單4.1中從第22行到第25行的四條語句之後，圖4.10中測得的結果為1000，可能性為100％。我們使用***圖4.11***來解釋，量子傅立葉逆變換與離散傅立葉逆變換具有相同的功效，***可以找到相同的oracular function Of的頻率f和周期r***

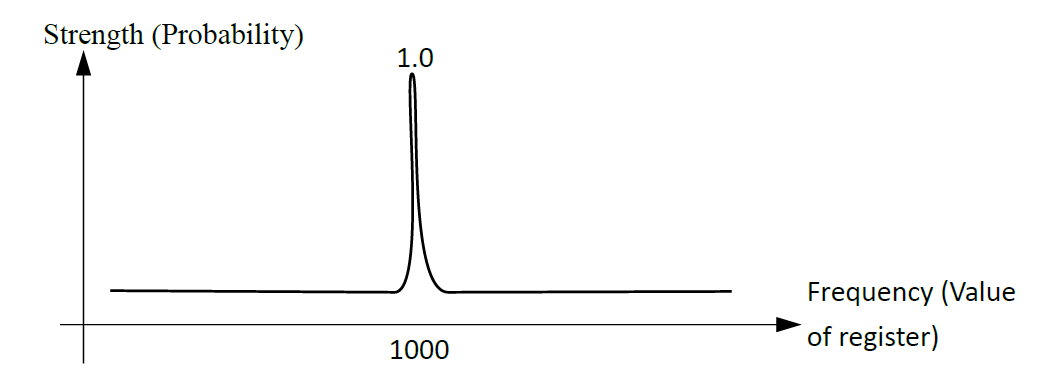


圖4.11：信號的頻率是具有四個量子位的量子寄存器的測量結果，其強度是在圖4.7中採樣16個點的逆量子傅立葉變換之後獲得結果的可能性。

將圖4.10的水平軸作為圖4.11的新水平軸，並將圖4.10的垂直軸作為圖4.11的新垂直軸。由於圖4.10的水平軸表示測量結果，該結果是具有四個量子位的量子寄存器的值，並且是信號的頻率，因此圖4.11的新水平軸表示信號的頻率。類似地，由於圖4.10的垂直軸表示獲得每個測量結果的可能性，即信號頻率的強度，因此圖4.11的新垂直軸表示信號頻率的強度。由於圖4.10中測得的結果為1000（八），可能性為100％，因此圖4.11中的信號頻率為1000（八），信號強度為100％。

從圖4.11可以看出，***Of***的每個輸出的相位的信號頻率f等於1000（八）。這表明信號旋轉八次回到其初始值0°，並且每十六個時間單位有八個信號周期。這使得到***Of的每個輸出***的相位的信號周期r等於(16 / 8) = (2)。因為到*Of*的每個輸出的大小相同並且等於()並且信號（到*Of*的每個輸出的相位）旋轉回到其初始值0°八次，所以它的輸出旋轉八次回到其初始值()也就是說，每十六個輸出的周期數為1000（八），***Of***的頻率f等於八。因此，這使得*Of*的周期r為16/8 =2。***這意味著，量子逆傅立葉變換和離散傅立葉逆變換具有相同的功效來求出相同的f的頻率f和周期r具有相同的oracular function。***

**4.12確定*Second Given Oracular Function*的頻率和周期**

***Second Given Oracular Function***是***Sf*: *{a1 a2 a3 a4 | ∀ ad ∈*** {0, 1} for 1 ≤ *d* ≤ 4} → { × **| a3 and a4** ∈ {0, 1}} = { × **| a3 and a4** ∈ {0, 1}}。對於second given oracular function ***Sf***，值（( × )是每個輸入**a1 a2 a3 a4**。輸入**a1 a2 a3 a4**的振幅的絕對值（權重）的平方有可能獲得將輸入**a1 a2 a3 a4**作為其輸入值的***Sf***的輸出。絕對值的平方與每個輸入**a1 a2 a3 a4**的振幅（權重）的和等於1。從***a10 a20 a30 a40到a11 a21 a31 a41***的每個輸入的***Sf***的十六個輸出分別為(), (), (), (), (), (), (), (), (), (), (), (), (), (), () and ()。

***Sf***的周期r滿足任何兩個輸入**a1 a2 a3 a4 和 a1 a2 a3 a4 + r的Sf(a1 a2 a3 a4) = Sf(a1 a2 a3 a4 + r)**。每十六個輸出的周期數等於*Sf*的頻率f。***這樣得出r × f的值等於十六（16）***。存儲在second given oracular function *Sf*中的隱藏信息和隱藏模式是因為其輸出四次旋轉回到其初始值(。也就是說，每十六個輸出的***周期數為四個***，***Sf***的頻率f等於四個。因此，由於***r × f的值等於十六（16）***，因此得出***Sf***的周期r等於(16 / 4) = 4。這意味著當***Sf***接受兩個輸入**a1 a2 a3 a4 和 a1 a2 a3 a4 + 4**作為其輸入值，***Sf***的兩個輸出與兩個輸入相同。這表明**Sf(a1 a2 a3 a4) = Sf(a1 a2 a3 a4 + 4)**。為了獲得頻率f和***Sf***的周期r，需要完成至少16次對進行指數計算並乘以16倍。

***4.12.1在second given oracular function中對周期和相位頻率進行編碼的信號***

對於second given oracular function ***Sf***，值()是每個輸入*a*1 *a*2 *a*3 *a*4的幅度大小（權重）。輸入*a*1 *a*2 *a*3 *a*4的幅值（權重）的絕對值的平方可以獲取以輸入*a*1 *a*2 *a*3 *a*4為輸入值的***Sf***輸出。值***(2 × π × 0.a3a4) = (2 × π × ((1 / 2) × a3 + (1 / 4) × a4))***是這16個輸入的幅度之間的相位。相位可以取0度到360度之間的任何值。從**a10 a20 a30 a40 到 a11 a21 a31 a41**的每個輸入的相位分別為0°, 90°, 180°, 270°, ***0°, 90°, 180°, 270°***, 0°, 90°, 180°, 270°, ***0°, 90°, 180° 和 270°***。***由於來自Sf的十六個輸出的每個振幅的大小都是()***，因此我們將***Sf***的輸入域視為時域，並將其十六個輸出的相位視為信號。這意味著確定***頻率f和Sf的周期r***等同於找出時域（輸入域）中信號的頻率f和周期r。

由於從**a10 a20 a30 a40 到 a11 a21 a31 a41**的每個輸入的輸出相位分別為0°, 90°, 180°, 270°, ***0°, 90°, 180°, 270°***, 0°, 90°, 180°, 270°, ***0°, 90°, 180° 和 270°***，我們將16個輸入值作為相應的16個時間單位，將16個相位作為16個信號樣本。每個樣本編碼一個角度。***該角度可以為0度或90度或180度或270度****。從****a10 a20 a30 a40 到 a11 a21 a31 a41***的十六個輸入值對應於從零到十五的十六個時間單位。我們使用圖4.12來說明為什麼找出頻率f和***Sf***的周期r等效於計算時域（輸入域）中信號的頻率f和周期r的原因。***在圖4.12中***，水平軸表示時域，其中包括***Sf***的輸入域，垂直軸表示信號，其中包括來自其輸出的十六個相位。從圖4.12可以看出，信號四次旋轉回到其初始值0°。這意味著每十六個時間單位有四個信號周期，信號頻率f等於四個。這樣得出信號的周期r等於（16/4）=（4）。由於到***Sf***的每個輸出的大小相同並且等於**()**，並且信號（到***Sf***的每個輸出的相位）旋轉回到其初始值0° 四次，因此其輸出旋轉四次回到其初始值**()**。也就是說，每十六個輸出的周期數為四個，Sf的頻率f等於四個。因此，這使得***Sf*** 的周期r為（16/4）＝（4）。

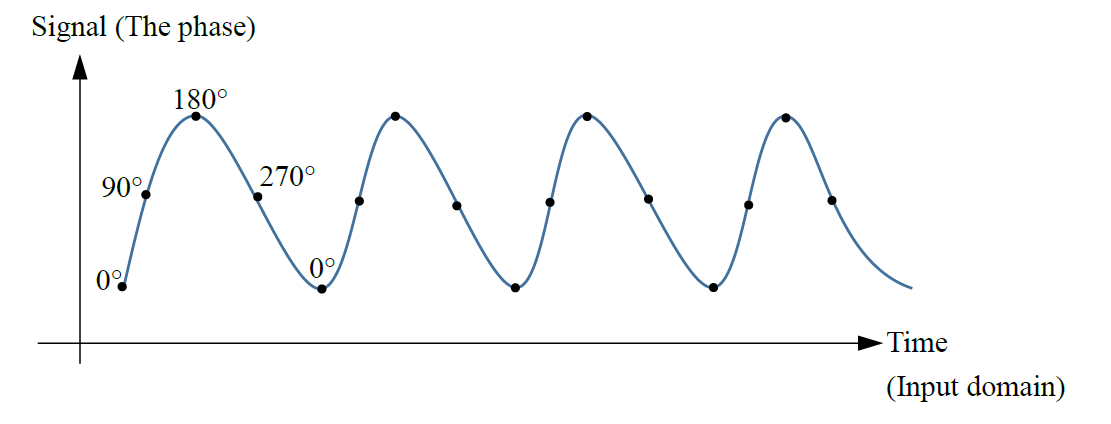


圖4.12：從second given oracular function ***Sf***的16個輸出的每個相位採樣16個點：***{a1 a2 a3 a4 | ∀ ad ∈*** {0, 1} for 1 ≤ *d* ≤ 4} → { × **| a3 and a4** ∈ {0, 1}} = { × **| a3 and a4** ∈ {0, 1}}.

**4.12.2對second given oracular function的*輸出的周期和頻率進行編碼的圓圈符號***

**在*4.12.1小節的圖4.12中***，採樣16個點僅對***Sf***的16個輸出中的16個相位進行編碼，因此我們使用圓符號表示如何確定頻率f和***Sf*** 的周期r等效於處理頻率f和時域（輸入域）中信號的周期r。在一個圓中，填充半徑將振幅的幅度編碼為***Sf***，以***Sf***為輸入**a1 a2 a3 a4**作為其輸入值。這就是說，圓的大小（陰影區域）與*Sf*(**a1 a2 a3 a4**)的振幅的絕對值的平方成正比。這給出了圓的大小（陰影區域）與以輸入**a1 a2 a3 a4**作為輸入值的***Sf***輸出的可能性成正比。在圓圈中繪製的較暗的線表示相位（負角度）使圓圈順時針旋轉或相位（正角度）使圓圈逆時針旋轉。圓圈下面的數字**a1 a2 a3 a4**對***Sf***的輸入進行編碼。在圖4.13中，它包括***second given oracular function******Sf***的十六個輸出：{ × **| a3 and a4** ∈ {0, 1}} = { × **| a3 and a4** ∈ {0, 1}}。在圖4.13中，十六個圓圈對圖4.12中的十六個採樣點進行編碼，每個圓圈下方的十六個數字對圖4.12的時域（輸入域）的十六個時間單位進行編碼。

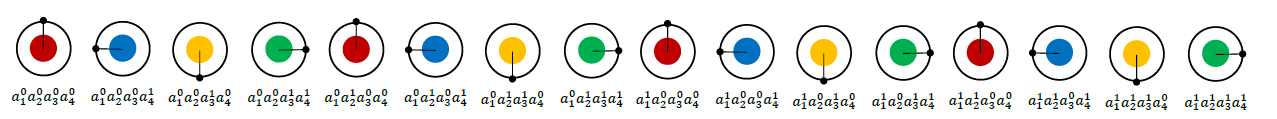


圖4.13：***second given oracular function Sf***的十六個輸出：{ × **| a3 and a4** ∈ {0, 1}} = { × **| a3 and a4** ∈ {0, 1}}.。

由於圖4.13中每個圓圈的陰影區域與()2成正比，因此每個圓圈的陰影區域相同。在圖4.13中，左第一個圓圈下方的數字*a*10 *a*20 *a*30 *a*40編碼一個零值，該值是**Sf(a10 a20 a30 a40)**的輸入。在左第一個圓中繪製的較暗線指出，**Sf(a10 a20 a30 a40)**的輸出相位為0°，並向左第一個圓旋轉0°。左第一個圓的半徑為() = (1 / 4)，即輸出到**Sf(a10 a20 a30 a40)**的大小。類似地，在圖4.13中，左第二個圓圈下方的數字*a*10 *a*20 *a*30 *a*41編碼值1，該值是*Sf*(*a*10 *a*20 *a*30 *a*41)的輸入。在左第二個圓中繪製的較暗線表示*Sf*(*a*10 *a*20 *a*30 *a*41)的輸出相位為90°，並向左第二個圓旋轉90°。左第二圓的半徑為() = (1 / 4)，即輸出到*Sf*(*a*10 *a*20 *a*30 *a*41)的大小。類似地，在圖4.13中，左第三個圓圈下方的數字*a*10 *a*20 *a*31 *a*40對值2進行編碼，該值是*Sf*(*a*10 *a*20 *a*31 *a*40)的輸入。左側第三個圓圈中繪製的較深線指出，*Sf*(*a*10 *a*20 *a*31 *a*40)的輸出相位為***180°***，並使左側第三個圓圈旋轉180°。左第三個圓的半徑是() = (1 / 4)，即輸出到**Sf(a10 a20 a31 a40)**的大小。類似地，在圖4.13中，左第四個圓圈下方的數字*a*10 *a*20 *a*31 *a*41對值3進行編碼，該值是*Sf*(*a*10 *a*20 *a*31 *a*41)的輸入。在左第四個圓圈中繪製的較深線表示**Sf(a10 a20 a31 a41)的輸出相位為270°**，並向左第四個圓圈旋轉270°。左第***四***個圓的半徑是() = (1 / 4)，即輸出到**Sf(a10 a20 a31 a41)**的大小。

類似地，在圖4.13中，左第五個圓到最後一個圓的半徑都是() = (1 / 4)，即通過**Sf(a10 a21 a30 a40)**輸出的幅度的***(a11 a21 a31 a41)***。從左第五個圓到最後一個圓繪製的較深的線指出，***Of (a10 a21 a30 a40)到Of (a11 a21 a31 a41)***的輸出相位分別為0°, 90°, 180°, 270°, 0°, 90°, 180°, 270°, 0°, 90°, 180°和270°。它們分別向左第五個圓到最後一個圓分別進行0度旋轉，90度旋轉，180度旋轉和270度旋轉三遍。在最後一個圓左下方的第五個圓下面的十二個數字*a*10 *a*21 *a*30 *a*40到*a*11 *a*21 *a*31 *a*41編碼十二個值四到十五，這些值隨後是*Sf*(*a*10 *a*21 *a*30 *a*40) 到 *Of* (*a*11 *a*21 *a*31 *a*41)的十二個輸入。

從圖4.13可以看出，在十六個圓（採樣十六個點）的信號中存儲的隱藏模式和信息是信號（相位）旋轉四次回到其初始值0°。也就是說，每十六個輸入（每十六個時間單位）就有四個信號周期，信號的頻率f等於四個。這意味著信號的周期r等於(16 / 4) = (4)。***由於信號（每個輸出到Sf的相位）旋轉四次回到其初始值0°，因此其輸出旋轉四次回到其初始值()***。這表明每十六個輸出的周期數為四個，*Sf*的頻率f等於四個。因此，這使*Sf*的周期r為16 / 4 = 4。因此，當second given oracular function *Sf*將兩個輸入**a1 a2 a3 a4 和 a1 a2 a3 a4 + 4**作為其輸入值時，它給出的輸出相同到兩個輸入。這就是說**Sf(a1 a2 a3 a4) = Sf(a1 a2 a3 a4 + 4)**到任意兩個輸入**a1 a2 a3 a4 和 a1 a2 a3 a4 + 4**。這樣，就可以獲得頻率f和周期*Sf*的r，它只需要實現四個乘法***(2 × π × 0.00) (0°)***，四個乘法***(2 × π × 0.01) (90°)***，四個乘法***(2 × π × 0.10) (180°)*** ，以及四個乘法**(*2 × π × 0.11) (270°)***。它極大地提高了第一種計算頻率f和*Sf*的周期r的性能。

**4.12.3實現Second Given Oracular Function的*十六個輸出的量子程序和量子電路***

在清單***4.2***中，該程序位於後端，它是***Open QASM的模擬器***，在IBM量子計算機中具有***32***個量子位。該程序將計算頻率*f*和***Sf***的周期r，以使**Sf(a1 a2 a3 a4) = Sf(a1 a2 a3 a4 + r)**到任意兩個輸入*a*1 *a*2 *a*3 *a*4 和*a*1 *a*2 *a*3 *a*4 + *r*。在清單***4.2***中，我們說明瞭如何應用具有一個量子位的量子閘和逆量子傅立葉變換來確定*Sf*的***頻率f***和周期r。圖***4.14***是找到***頻率f***和*Sf*的周期r的量子電路。聲明**“ *OPENQASM 2.0；”清單4.2***的第一行上的代碼指示該程序是使用Open QASM的2.0版編寫的。接下來，聲明“包括***"qelib1.inc"***清單4.2的第二行將繼續解析文件 “qelib1.inc”，就像文件的內容粘貼在include語句的位置一樣，其中文件 “qelib1.inc” 是***Quantum Experience (QE) Standard Header***並相對於當前工作目錄指定路徑。

|  |
| --- |
| 1. OPENQASM 2.0; 2. include "qelib1.inc"; 3. qreg q[4]; 4. creg c[4]; |

清單**4.2**：計算***second given oracular function Sf***的秒數的頻率f和周期r的程序：*{****a1 a2 a3 a4 | ∀ ad* ∈** {0, 1} for 1 ≤ *d* ≤ 4} → { × **| a3 and a4** ∈ {0, 1}} = { × **| a3 and a4** ∈ {0, 1}}。

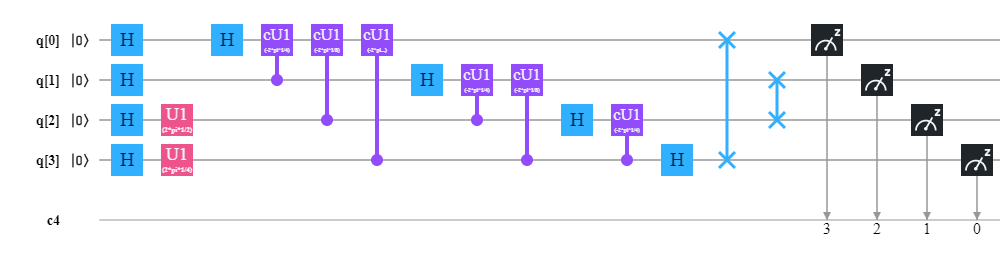


圖4.14：求出second given oracular function *Sf*的頻率f和周期r的量子電路：{**a1 a2 a3 a4 | ∀ ad ∈** {0, 1} for 1 ≤ *d* ≤ 4} → { × **| a3 and a4** ∈ {0, 1}} = { × **| a3 and a4** ∈ {0, 1}}。

接下來，聲明 ***“qreg q[4];”* *清單4.2***的第三行聲明了程序中有***四***個量子位。在圖**4.14**的左上方，四個量子位依次為q[0], q[1], q[2] 和 q[3]。每個量子位的初始值設置為狀態|0>。我們利用四個量子位元q[0], q[1], q[2] 和 q[3]來對輸入域*{****a1 a2 a3 a4 | ∀ ad* ∈** {0, 1} for 1 ≤ *d* ≤ 4}。這表明量子位q[0]編碼位*a*1，量子位q[1]編碼位*a*2，量子位q[2]編碼位*a*3，量子位q[3]編碼位*a*4。

為了便於解釋，對於0 ≤ *k* ≤ ***3***的q[k]0將對q[k]的值0進行***編碼***，對於0 ≤ *k* ≤ ***3***的q[k]1將對q[k]的值1進行編碼。類似地，為了便於說明，我們計算出初始頻率向量ff和周期***Sf***，以使**Sf(a1 a2 a3 a4) = Sf(a1 a2 a3 a4 + r)**進入任意兩個輸入*a*1 *a*2 *a*3 *a*4 和 *a*1 *a*2 *a*3 *a*4 + *r*是

|*B*0> = ***|q[0]0> |q[1]0> |q[2]0> |q[3]0>*** = |0> |0> |0> |0> = |0000>.

初始狀態向量|*B*0>的***相應十進制值***為23 × ***q[0]0*** + 22 × ***q[1]0*** + 21 × ***q[2]0*** + 20 × ***q[3]0***。也就是說，量子位q[0]0是最高有效位，量子位q[3]0是最低有效位。

***接下來***，聲明 ***“creg c[4];”*** 清單***4.2***第四行的代碼聲明程序中有***四***個經典位。在圖4.14的左下方，***四***個經典位分別為c[0], c[1], c[2] 和c[3]。每個經典位的初始值都設置為零(0)。為了便於說明，對於0 ≤ *k* ≤ ***3***的c[k]0將對c[k]的值0進行編碼，對於0 ≤ *k* ≤ ***3***的c[k]1將對c[k]的值1進行編碼。四個初始古典位c[3]0 c[2]0 c[1]0 c[0]0的***對應十進制值***為23 × c[3]0 + 22 × c[2]0 + 21 × c[1]0 + 20 × c[0]0。這意味著經典位c[3]0是最高有效位，經典位c[0]0是最低有效位。

接下來，四個語句 “h q[0];”, “h q[1];” “h q[2];” 和 “h q[3]，清單4.2的第5至8行中的第一個時隙***完成***了四個Hadamard閘

|  |
| --- |
| ***Listing 4.2* continued…**  // We use the following *six* statements to implement the second given oracular  // function *Sf*: {*a*1 *a*2 *a*3 *a*4 | ∀ *ad* ∈ {0, 1} for 1 ≤ *d* ≤ 4} → { × |  // *a*3 and *a*4 ∈ {0, 1}} = { × | *a*3 and *a*4 ∈ {0, 1}}.   1. h q[0]; 2. h q[1]; 3. h q[2]; 4. h q[3]; 5. u1(2\*pi\*1/4) q[3]; 6. u1(2\*pi\*1/2) q[2]; |

圖4.14中的量子電路。四個語句“h q[0];”, “h q[1];” “h q[2];” 和 “h q[3]將初始狀態向量***|B0>*** = |q[0]0> |q[1]0> |q[2]0> |q[3]0>作為其輸入狀態向量。由於***每個量子位的初始狀態都設置為狀態|0>***，因此這四個語句“h q[0];”, “h q[1];” “h q[2];” 和 “h q[3]，實際完成 × = = = ( + ) = (|0> + |1>)。這表明這四個語句將四個量子位q[0], q[1], q[2] 和 q[3]從一種狀態|0>轉換為另一種狀態 (|0> + |1>)(它們的疊加)。***因此***，四個量子位q[0], q[1], q[2] 和 q[3]的疊加為（( (|0> + |1>)) ( (|0> + |1>)) ( (|0> + |1>)) ( (|0> + |1>))。這就是說，我們獲得以下新的狀態向量

***|B1>*** = ( (|q[0]0> + |q[0]1>)) ( (|q[1]0> + |q[1]1>)) ( (|q[2]0> + |q[2]1>))

( (|q[3]0> + |q[3]1>))。

接下來，兩個語句“***u1(2\*pi\*1/4) q[3];***” 和 “***u1(2\*pi\*1/2) q[2];***”清單4.2中第9行到第10行上的代碼隨後完成了一個旋轉閘到量子位q[3]和另一個旋轉閘到圖4.14中量子電路第二個時隙中的量子位元q[2]。這兩個語句是“***u1(2\*pi\*1/4) q[3];***” 和 “***u1(2\*pi\*1/2) q[2];***”將新的狀態向量(***|B1>***)作為其輸入狀態向量。量子位元q[3]的狀態為( (|q[3]0> + |q[3]1))，量子位元q[2]的狀態為( (|q[2]0> + |q[2]1))。因此，語句“***u1(2\*pi\*1/4) q[3];***”實際實現 × = = = ( + ) = ( + ) = (|0> + |1>) = (|0> + |1>) = (|0> + ***()*** |1>) = (|q[3]0> + ***()*** |q[3]1>)。這就是說語句 “**u1(2\*pi\*1/4) q[3];**” 將相位 **= = cos(π / 2) + × sin(π / 2) = 0 + × 1 =** 對量子位元q[3]的疊加的狀態|1>不變，而不會改變狀態的係數|0>在量子位q[3]的疊加上。

同樣，語句 “***u1(2\*pi\*1/2) q[2];***” 實際實現 × = = = ( + ) = ( + ) = (|0> + |1>) = (|0> + |1>) = (|0> + (−1) |1>) = (|q[2]0> + (−1) |q[2]1>)。這意味著語句“***u1(2\*pi\*1/2) q[2];***” 將相位 **= = cos(π) + × sin(π) = −1 + × 0 = −1**對量子位元***q[2]***的疊加態|1>的係數，並且不改變量子疊加的狀態|0>的係數***q[2]***位。沒有量子閘在圖4.14的量子電路的第二個時隙中作用於量子位q[0]至q[1]，因此它們的當前狀態不變。 這表明我們得到以下新的狀態向量

*|****B2****>* = ( (|q[0]0> + |q[0]1>)) ( (|q[1]0> + |q[1]1>)) ( (|q[2]0> +

|q[2]1>)) ( (|q[3]0> + |q[3]1>))

= ( (|q[0]0> + |q[0]1>)) ( (|q[1]0> + |q[1]1>)) ( (|q[2]0> +***(−1)*** |q[2]1>))

( (|q[3]0> + ***()*** |q[3]1>))

= (|q[0]0> |q[1]0> |q[2]0> |q[3]0> + ***()*** |q[0]0> |q[1]0> |q[2]0> |q[3]1> +

***(−1)*** |q[0]0> |q[1]0> |q[2]1> |q[3]0> + *(−)* |q[0]0> |q[1]0> |q[2]1> |q[3]1> +

|q[0]0> |q[1]1> |q[2]0> |q[3]0> + ***()*** |q[0]0> |q[1]1> |q[2]0> |q[3]1> +

***(−1)*** |q[0]0> |q[1]1> |q[2]1> |q[3]0> + *(−)* |q[0]0> |q[1]1> |q[2]1> |q[3]1> +

|q[0]1> |q[1]0> |q[2]0> |q[3]0> + *()* |q[0]1> |q[1]0> |q[2]0> |q[3]1> +

***(−1)*** |q[0]1> |q[1]0> |q[2]1> |q[3]0> + *(−)* |q[0]1> |q[1]0> |q[2]1> |q[3]1> +

|q[0]1> |q[1]1> |q[2]0> |q[3]0> + () |q[0]1> |q[1]1> |q[2]0> |q[3]1> +

***(−1)*** |q[0]1> |q[1]1> |q[2]1> |q[3]0> + (−) |q[0]1> |q[1]1> |q[2]1>|q[3]1>).

在新的狀態向量(**|*B*2>**)中，從狀態|q[0]0> |q[1]0> |q[2]0>|q[3]0>到狀態|q[0]1> |q[1]1> |q[2]1>|q[3]1>隨後是(), (), (), (), (), (), (), (), (), (), (), (), (), (), (), 和 ()。這意味著在新的狀態向量***(|B2>)***中，它將利用每個狀態的幅度來編碼十六個輸出到second given oracular function **Sf**：{**a1 a2 a3 a4 | ∀ ad ∈** {0, 1} for 1 ≤ *d* ≤ 4} → { × **| a3 and a4** ∈ {0, 1}} = { × **| a3 and a4** ∈ {0, 1}}。存儲在新狀態向量*(****|B2>****)*中的隱藏信息和隱藏模式將使振幅***四***次旋轉回到其初始值。

類似地，在新狀態向量*(****|B2>****)*中，它使用每種狀態的幅度的大小() = (1 /4)作為圖4.13中每個圓的半徑。在圖4.13中，每個圓的陰影區域與(1 / 4)2成正比，因此每個圓的陰影區域相同。在新的狀態向量*(****|B2>****)*中，從狀態|q[0]0> |q[1]0> |q[2]0> |q[3]0> 到狀態 |q[0]1> |q[1]1> |q[2]1> |q[3]1> ***隨後為***0°, 90°, 180°, 270°, 0°, 90°, 180°, 270°, 0°, 90°, 180°, 270°, 0°, 90°, 180°, 和 270°。隨後，它們向左第一個圓到圖4.13中的最後一個圓***四次旋轉0度，旋轉90度，旋轉180度和旋轉270度***。在新的狀態向量*(****|B2>****)*中，它應用從圖4.13的左第一個圓到最後一個圓繪製的暗線，以指出***0°旋轉，90°旋轉，180°旋轉和270°旋轉***。旋轉四次到圖4.13中的十六個圓圈。這表明存儲在新狀態向量***(|B2>)***中的隱藏信息和隱藏模式表明該相位旋轉了**四**次回到其初始值0°。

**4.12.4使用*逆傅立葉逆變換*來計算Second Given Oracular Function的頻率和輸出週期**

接下來，清單***4.2***中從第***11***行到第***22***行的十二個語句實現了具有四個量子位的逆量子傅立葉變換。語句 “h q[0];”

|  |
| --- |
| **Listing 4.2 continued…**  // We use the following *twelve* statements to implement the inverse quantum  // Fourier transform with four quantum bits.   1. h q[0]; 2. cu1(-2\*pi\*1/4) q[1],q[0]; 3. cu1(-2\*pi\*1/8) q[2],q[0]; 4. cu1(-2\*pi\*1/16) q[3],q[0]; 5. h q[1]; 6. cu1(-2\*pi\*1/4) q[2],q[1]; 7. cu1(-2\*pi\*1/8) q[3],q[1]; |

***清單4.2***中第***11***行的代碼在***圖4.14***的第三個時隙中完成了一個Hadamard閘。它將新的狀態向量***|B2>***作為其輸入狀態向量。 ***|B2>***中的量子位元q[0]的當前狀態為( (|q[0]0> + |q[0]1>))，因此語句 “h q[0];” ***清單4.2中第11行***的實際執行 × = = |0> = ***|q[0]0>***。這就是說***語句*** “h q[0];” ***將量子位q[0]從一種狀態***( (|q[0]0> + |q[0]1>))***(其疊加)轉換為另一種狀態***|q[0]0>。由於在圖4.14的量子電路的第三個時隙中沒有量子閘作用於量子位***q[1] 至 q[3]***，因此它們的當前狀態不變。這***意味***著我們***獲得***以下新的狀態向量

***|B3>*** = (|q[0]0>) ( (|q[1]0> + |q[1]1>)) ( (|q[2]0> + ***(−1)*** |q[2]1>))

( (|q[3]0> + ***()*** |q[3]1>))

接下來，聲明 “cu1(-2\*pi\*1/4) q[1],q[0];” ***清單4.2中第12行***上的是一個受控旋轉閘。控制位是量子位q[1]，目標位是量子位q[0]。如果控制位是|1>，而目標位是|1>，則將相位加到狀態的|1>的係數中目標位。否則，它不會更改目標位。語句 “cu1(-2\*pi\*1/4) q[1],q[0];” ***清單4.2中第12行***上的代碼採用新的狀態向量***|B3>***作為其輸入狀態向量，並在圖4.14的第四個時隙中***完成***了一個受控的旋轉閘。***目標位***q[0]的狀態為***(|q[0]0>)***，因此語句 “cu1(-2\*pi\*1/4) q[1],q[0];” 不會更改目標位q[0]的狀態***(|q[0]0>)***。因為在***圖4.14***的量子電路的第四個時隙中沒有量子閘作用於量子位***q[2] 至 q[3]***，所以它們的當前狀態不變。這***意味***著我們得到以下新的狀態向量

***|B4>*** = (|q[0]0>) ( (|q[1]0> + |q[1]1>)) ( (|q[2]0> + ***(−1)*** |q[2]1>))

( (|q[3]0> + ***()*** |q[3]1>))。

接下來，聲明“***cu1(-2\*pi\*1/8) q[2],q[0];***”***清單4.2中的第13行***是

受控旋轉閘。控制位是量子位***q[2]***，目標位是量子位q[0]。如果控制位是|1>而目標位是|1>，則將相位加到狀態的|1>的係數中目標位。否則，它不會更改目標位。語句“***cu1(-2\*pi\*1/8) q[2],q[0];***”***清單4.2中第13行***上的“行”將新的狀態向量***|B4>***作為其輸入狀態向量，並在圖4.14的第五個時隙中實現了一個受控的旋轉閘。因為目標位q[0] 的狀態為 ***(|q[0]0>)***，所以語句“***cu1(-2\*pi\*1/8) q[2],q[0];***”不會更改***目標位***q[0] 的狀態 ***(|q[0]0>)***。在圖4.14的量子電路的第***五***個時隙中，沒有量子閘作用於量子位***q[1] 和 q[3]***，它們的當前狀態不變。這意味著我們獲得以下新的狀態向量

***|B5>*** = (|q[0]0>) ( (|q[1]0> + |q[1]1>)) ( (|q[2]0> + ***(−1)*** |q[2]1>))

( (|q[3]0> + ***()*** |q[3]1>))。

接下來，聲明“***cu1(-2\*pi\*1/16) q[3],q[0];***”***清單4.2中第14行***上的是受控旋轉閘。控制位是量子位***q[3]***，目標位是量子位***q[0]***。如果控制位是|1>，而目標位是|1>，則將相位加到狀態的|1>的係數中目標位。否則，它不會更改目標位。語句“***cu1(-2\*pi\*1/16) q[3],q[0];***”***清單4.2中第14行***上的“行”將新狀態向量***|B5>***作為其輸入狀態向量，並在圖4.14的第***六***個時隙中完成了一個受控的旋轉閘。由於***目標位***q[0]的狀態為(|q[0]0>)，因此語句“***cu1(-2\*pi\*1/16) q[3],q[0];***”不會更改目標位q[0]狀態***(|q[0]0>)***。在圖4.14的量子電路的第***六***個時隙中，沒有量子閘作用於量子位***q[1] 和 q[2]***，它們的當前狀態不變。這表明我們***獲得***了以下新的狀態向量

***|B6>*** = (|q[0]0>) ( (|q[1]0> + |q[1]1>)) ( (|q[2]0> + ***(−1)*** |q[2]1>))

( (|q[3]0> + ***()*** |q[3]1>))。

接下來，聲明“***h q[1];***”***清單4.2中第15行***上的代碼在圖4.14的第***七***個時隙中實現了一個Hadamard閘。它將新的狀態向量***|B6>***作為其輸入狀態向量。***|B6>***中量子位***q[1]***的當前狀態為( (***|q[1]0> + |q[1]1>***))，因此語句“***h q[1];***”***清單4.2中第15行***上的實際執行 × = = |0> = ***|q[1]0>***。這意味著語句“***h q[1];***”將量子位***q[1]***從一種狀態( (***|q[1]0> + |q[1]1>***))（其疊加）轉換為另一種狀態***|q[1]0>***。因為在圖4.14的量子電路的第***七***個時隙中沒有量子閘作用於量子位***q[0], q[2] 和 q[3]***，所以它們的當前狀態不變。這就是說，我們獲得以下新的狀態向量

***|B7>*** = (|q[0]0>) (|q[1]0>) ( (|q[2]0> + ***(−1)*** |q[2]1>)) ( (|q[3]0>

+ ***()*** |q[3]1>))。

接下來，聲明“***cu1(-2\*pi\*1/4) q[2],q[1];***”清單4.2中第16行的是一個受控旋轉閘。控制位是量子位***q[2]***

，目標位是量子位***q[1]***。如果控制位是|1>，而目標位是|1>，則將相位加到狀態的|1>的係數中目標位。否則，它不會更改目標位。語句“**cu1(-2\*pi\*1/4) q[2],q[1];**”**清單4.2中第16行**上的“行”將新的狀態向量**|*B*7>**作為其輸入狀態向量，並在圖4.14的第***八***個時隙中完成了一個受控的旋轉閘。因為目標位***q[1]***的狀態為(|q[1]0>)，所以語句“***cu1(-2\*pi\*1/4) q[2],q[1];***”不會更改***目標位q[1]***的狀態(|q[1]0>)。在圖4.14的量子電路的第八個時隙中，沒有量子閘可作用於量子位***q[0] 和 q[3]***，它們的當前狀態不變。因此，我們獲得以下新的狀態向量

***|B8>***= (|q[0]0>) (|q[1]0>) ( (|q[2]0> + ***(−1)*** |q[2]1>)) ( (|q[3]0> +

***()*** |q[3]1>))。

接下來，聲明“***cu1(-2\*pi\*1/8) q[3],q[1];***”***清單4.2中第17行***上的是一個受控的旋轉閘。控制位是量子位***q[3]***，目標位是量子位***q[1]***。如果控制位是|1>而目標位是|1>，則將相位加到狀態的|1>的係數中目標位。否則，它不會更改目標位。語句“***cu1(-2\*pi\*1/8) q[3],q[1];***”***清單4.2中第17行***上的“行”將新的狀態向量***|B8>***作為其輸入狀態向量，並在圖4.14的第***九***個時隙中實現了一個受控的旋轉閘。***目標位q[1]***的狀態為***(|q[1]0>)***，因此語句“ ***cu1(-2\*pi\*1/8) q[3],q[1];***”不會更改目標位***q[1]***的狀態***(|q[1]0>)***。在圖4.14的量子電路的第***九***個時隙中，沒有量子閘作用於量子位***q[0] 和 q[2]***，它們的當前狀態不變。這就是說，我們獲得以下新的狀態向量

***|B9>*** = (|q[0]0>) (|q[1]0>) ( (|q[2]0> + ***(−1)*** |q[2]1>)) ( (|q[3]0> +

***()*** |q[3]1>))。

接下來，聲明“h q[2];”***清單4.2中第18行***上的代碼在圖4.14的第**十**個時隙中完成了一個Hadamard閘。它以新的狀態向量***|B9>***作為輸入狀態

|  |
| --- |
| **Listing 4.2 continued…**   1. h q[2]; 2. cu1(-2\*pi\*1/4) q[3],q[2]; 3. h q[3]; 4. swap q[0],q[3]; 5. swap q[1],q[2]; |

向量。由於***|B9>***中量子位***q[2]***的當前狀態為( (***|q[2]0> + (−1) |q[2]1>***))，因此語句“h q[2];”***清單4.2中第18行***上的實際實現 × = = |1> = ***|q[2]>***。這意味著語句“h q[2];”將量子位***q[2]***從一種狀態( (**|*q[2]0>*** *+* ***(−1)******|q[2]1>***))（其疊加）轉換為另一種狀態***|q[2]1>***。因為在圖4.14的量子電路的第十個時隙中沒有量子閘作用於量子位***q[0], q[1] 和 q[3]***，所以它們的當前狀態不變。這意味著我們得到以下新的狀態向量

***|B10>***= (|q[0]0>) (|q[1]0>) ***(|q[2]1>)*** ( (|q[3]0> + **()** |q[3]1>))

= (|q[0]0>) (|q[1]0>) ( (***|q[2]1>*** |q[3]0> + (**) |q[2]1>** |q[3]1>))。

接下來，聲明“cu1(-2\*pi\*1/4) q[3],q[2];”***清單4.2中第19行***的是一個受控旋轉閘。控制位是量子位***q[3]***，目標位是量子位***q[2]***。如果控制位是|1>，而目標位是|1>，則將相位加到狀態的|1>的係數中目標位。否則，它不會更改目標位。語句“cu1(-2\*pi\*1/4) q[3],q[2];”***清單4.2中第19行***上的行將新的狀態向量***|B10>***作為其輸入狀態向量，並在圖4.14的量子電路的第***11***個時隙中完成了一個受控的旋轉閘。由於***目標位q[2]***的狀態為***(|q[2]1>)***，因此語句“cu1(-2\*pi\*1/4) q[3],q[2];”將相位 **= cos(−π / 2) + () × sin(−π / 2) = cos(π / 2) + (−1) × () × sin(π / 2) = 0 + (−1) × () × 1 = ()**至狀態係數是***目標位q[2]***的狀態**(*|q[2]1>)***。在圖4.14的量子電路的第11個時隙中，沒有量子閘作用於量子位***q[0] 和 q[1]***，它們的當前狀態不變。因此，我們獲得以下新的狀態向量

***|B11>*** = (|q[0]0>) (|q[1]0>) ( (***|q[2]1>*** |q[3]0> + **(*) () |q[2]1>*** |q[3]1>))

= (|q[0]0>) (|q[1]0>) ( (***|q[2]1>*** |q[3]0> + ***|q[2]1>*** |q[3]1>))

= (|q[0]0>) (|q[1]0>) (**|q[2]1>** ( (|q[3]0> + |q[3]1>))。

接下來，聲明“***h q[3];***”***清單4.2中第20行***的行在圖4.14的量子電路的第***十二***個時隙中執行一個Hadamard閘。它將新的狀態向量***|B11>***作為其輸入狀態向量。 ***|B11>***中的量子位元***q[3]***的當前狀態為( (***|q[3]0>*** *+* ***|q[3]1>***))，因此語句“***h q[3];***”***清單4.2中第20行***上的代碼實際上完成了 × = = |0> = ***|[q[3]0>***。這意味著語句“***h q[3];***”將量子位***q[3]***從一種狀態( (***|q[3]0>*** *+* ***|q[3]1>***))轉換為另一種狀態***|[q[3]0>***。由於在圖4.14的量子電路的第***十二***個時隙中沒有量子閘作用於量子位***q[0], q[1] 和q[2]***，因此它們的當前狀態不變。這就是說，我們獲得以下新的狀態向量

***|B12>*** = (|q[0]0>) (|q[1]0>) (***|q[2]1>***) (***|q[3]0>***)。

接下來，聲明“***swap q[0],q[3];***”***清單4.2中第21行***的是交換閘，用於交換包含在其中的信息兩個量子位q[0] 和 q[3]。它以新的狀態向量***|B12>***作為輸入狀態向量，並在圖4.14的量子電路的第***十三***時隙中實現一個交換閘。因為在圖4.14的量子電路的第十三時隙中沒有量子閘作用於量子位***q[1] 和 q[2]***，所以它們的當前狀態不變。這意味著我們獲得以下新的狀態向量

***|B13>*** = (|q[0]0>) (|q[1]0>) **(*|q[2]1>*)** (|q[3]0>).。

接下來，聲明“swap q[1],q[2];”***清單4.2中第22行***的是交換閘，用於交換包含在其中的信息兩個量子位***q[1] 和 q[2]***。它以新的狀態向量***|B13>***作為其輸入狀態向量，並在圖4.14的量子電路的第十四個時隙中執行一個交換閘。由於在圖4.14的量子電路的第***十四***個時隙中沒有量子閘作用於量子位***q[0] 和q[3]***，因此它們的當前狀態不變。這就是說，我們獲得以下新的狀態向量

***|B14>*** = (|q[0]0>) **(|*q[1]1>) (|q[2]0>)*** (|q[3]0>)。

**4.12.5*通過在量子程序中使用測量來讀出Second Given Oracular Function的頻率和周期***

量子位q[0]是最高有效位，量子位q[3]是最低有效位。經典位c[3]是最高有效位，經典位c[0]是最高有效位

|  |
| --- |
| Listing 4.2 continued…   1. measure q[0] -> c[3]; 2. measure q[1] -> c[2]; 3. measure q[2] -> c[1]; 4. measure q[3] -> c[0]; |

最低有效位。***因此***，這四個語句為 “***measure q[0] -> c[3];***”, “**measure q[1] -> c[2];**”, “**measure q[2] -> c[1];**” 和 “**measure q[3] -> c[0];**””從**清單4.2中的第23行到第26行**，從最高有效量子位q[3]讀出最高有效量子位q[0]。他們通過覆蓋最高有效經典位c[3]至最低有效經典位c[0]來記錄測量結果。它們***實現***了圖4.14中從量子電路的第***十五***個時隙到第***十八***個時隙的測量。

在後端是IBM量子計算機中具有**32**個量子位的***Open QASM模擬器***，我們使用“**run**”命令執行***清單4.2***中的程序。測量結果如***圖4.15***所示。從***圖4.15***中，我們***獲得***結果***0100 (c[3] = q[0] = |0>****，****c[2] = q[1] = |1>***，c[1] = ***q[2]*** = |0>和c[0] = ***q[3]*** = |0>)，概率為1（100％）。這表明在可能性為1（100％）的情況下，我們得到了量子位***q[0]***的值***|0>***，量子位***q[1]***的值***|1>***，量子位q[2]的值]為|0>，量子位q[3] 的值為 |0>。從測得的結果0100（四個），概率為1（100％），second given oracular function ***Sf***的輸出旋轉四次回到其初始值**()**，並且***其輸出***的相位旋轉返回其初始值0°的四倍。這意味著每16個輸出的周期數為4，**Sf的頻率f等於4**。因此，我們得出***Sf***的周期r為(16 / 4) = 4，因此對於任何兩個輸入端a1 a2 a3 a4 和 a1 a2 a3 a4 + 4的Sf(a1 a2 a3 a4) = Sf(a1 a2 a3 a4 + 4)。

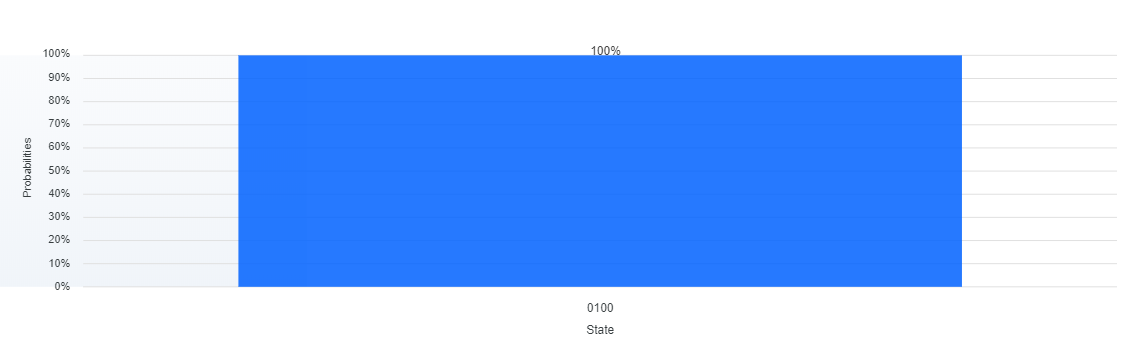
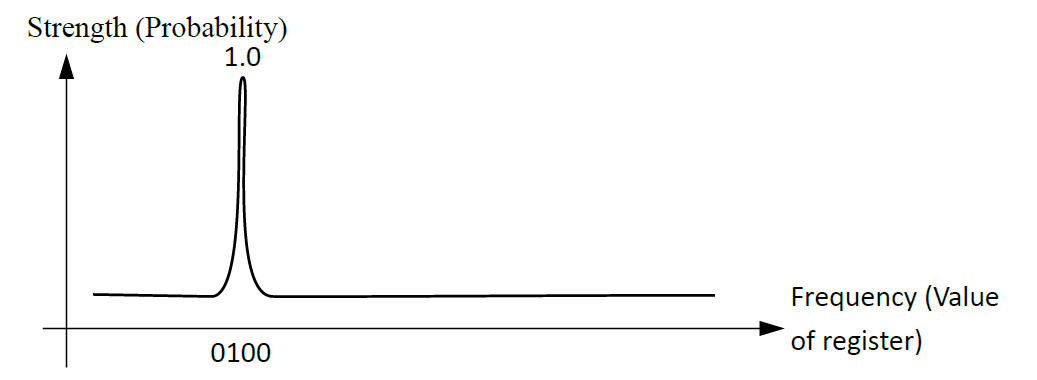


圖4.15：***信號頻率是每個具有四個量子位的量子寄存器的信號周期數*，它是0100**，對於second given oracular function ***Sf***，概率為1（100％）：***a1 a2 a3 a4 | ∀ ad* ∈** {0, 1} for 1 ≤ *d* ≤ 4} → { × **| a3 and a4** ∈ {0, 1}} = { × **| a3 and a4** ∈ {0, 1}}。

**4.12.6逆傅立葉逆變換*讀取second given oracular function的頻率和周期*的能力**

在清單4.2中從第5行到第10行的**6**條語句之後，對***圖4.12***中的16個點進行採樣對***second given oracular function******Sf***的輸出的16個相位進行編碼：***{a1 a2 a3 a4 | ∀ ad* ∈** {0, 1} for 1 ≤ *d* ≤ 4} → { × **| a3 and a4** ∈ {0, 1}} = { × **| a3 and a4** ∈ {0, 1}}。然後，在***清單4.2中從第11行到第22行***的十二個語句之後，具有四個量子位q[0], q[1], q[2] 和q[3]的量子狀態向量對信號的頻率進行編碼信號頻率的強度。接下來，**在清單4.2**中從第23行到第26行的四條語句之後，***圖4.15***中測得的結果為***0100***，可能性為100％。我們利用***圖4.16***來解釋，量子傅立葉逆變換與離散傅立葉逆變換具有相同的功效，可以***找到相同的oracular function Sf的頻率f和周期r***。我們將***圖4.15***的水平軸作為***圖4.16***的新水平軸，並將***圖4.15***的垂直軸作為***圖4.16***的新垂直軸。***圖4.15***的水平軸表示測量的結果，即量子寄存器的值。



***圖4.16***：在***圖4.12***中採樣了16個點的量子傅立葉逆變換之後，信號的頻率是具有四個量子位的量子寄存器的測量結果，其強度是***讀出***結果的可能性。

四個量子位元，並且是信號的頻率，因此***圖4.16***中新的水平軸表示信號的頻率。類似地，由於***圖4.15***的垂直軸表示獲得每個測量結果的可能性，即信號頻率的強度，因此圖4.16的新垂直軸表示信號頻率的強度。由於**圖4.15**中測得的結果為***0100（四個）***，可能性為100％，因此圖4.16中的信號頻率為***0100（四個）***，信號強度為100％。

從***圖4.16***可以看出，信號相對於***Sf***每個輸出的相位的頻率f等於***0100（四個）***。這意味著信號四次旋轉回到其初始值0°，並且每十六個時間單位有四個信號周期。這意味著信號到***Sf***每個輸出的相位的周期r等於***(16 / 4) = (4)***。 *Sf*的每個輸出的大小相同，並且等於()，並且信號（*Sf*的每個輸出的相位）旋轉四次回到其初始值0°，因此其輸出旋轉四次回到其初始值()。這表明每十六個輸出的周期數為0100（四個），並且*Sf*的頻率f等於四個。因此，這使得*Sf*的周期r等於(16 / 4) = 4。這意味著量子逆傅立葉變換和離散傅立葉逆變換具有相同的冪來找到頻率f和周期f。相同的oracular function *Sf*。

**4.13小結**

在本章中，我們介紹了統一的複雜根源。接下來，我們描述了一個n個複數個n的單位根的Abelian群以及一個乘法的二進制運算。我們還介紹了第n個複數根的性質。然後，我們說明了離散傅立葉變換和***逆***離散傅立葉變換。我們還介紹了實現離散傅立葉變換的量子傅立葉變換。同時，我們描述了實現量子傅立葉變換的量子電路，並給出了實現量子傅立葉變換的時間複雜度的評估。接下來，我們說明了實現***逆***離散傅立葉變換的量子***逆***傅立葉變換。同時，介紹了實現***逆***量子傅立葉變換的量子電路，並對實現逆量子傅立葉變換的時間複雜度進行了評估。然後，我們編寫了兩個量子程序來計算兩個給定的oracular functions輸出的頻率和周期。

**4.14參考書目**

在本章中，要獲得有關n個複雜的第n個單位根及其性質的更多詳細信息，推薦的書是*[****Cormen et al 2009****]*。有關離散傅里葉變換和離散傅里葉逆變換的更詳細說明，推薦書籍為*[****Cormen et al 2009*;** Nielsen and Chuang 2000; Imre and Balazs 2005; Lipton and Regan 2014; Silva 2018; ***Johnston et al 2019***].。這兩篇著名的文章[***Coppersmith 1994; Shor 1994***]給出了量子傅立葉變換和逆量子傅立葉變換的原始版本。***量子傅立葉變換和逆量子傅立葉變換的乘積狀態分解的一個很好的例子是[Griffiths and Niu 1996; Cleve et al 1998]***。 ***[Cross 2017]***中的著名文章很好地介紹了Open QASM的說明。

**4.15練習**

4.1請編寫一個量子程序來確定third given oracular function *Tf*的輸出頻率和周期：*{****a1 a2 a3 a4 | ∀ ad* ∈** {0, 1} for 1 ≤ *d* ≤ 4} → { × **| a2, a3 and a4** ∈ {0, 1}}。

4.2請編寫一個量子程序來計算fourth given oracular function *Ff*的輸出頻率和周期：{***a1 a2 a3 | ∀ ad* ∈** {0, 1} for 1 ≤ *d* ≤ 3} → { × ***| a3***∈ {0, 1}}。

4.3請編寫一個量子程序來計算fifth given oracular function *If*的輸出頻率和周期，如果：{**a1 a2 a3 | ∀ ad ∈** {0, 1} for 1 ≤ *d* ≤ 3} → { × **| a2 and a3** ∈ {0, 1}}。