

## 第三章

### 量子搜索演算法及其應用

因為在 **IBM** 的量子計算機中,它們只提供單個量子位元和兩個量子位元的量子閘,三個量子位元和許多量子位元的量子閘必須手動分解為單個量子位元和兩個量子位元的量子閘。一個好的量子演算法,解決任何給定的問題與輸入的  $n$  位的大小必須具有一個恒定的成功概率,測量其最靠近的答案。在本章中,我們首先說明瞭如何將三個量子位元和許多量子位元的量子閘分解為單個量子位元和兩個量子位元的量子閘。接下來,我們將介紹如何編寫具有 Open QASM 版本 2.0 的量子程式,以實現各種量子閘之間的分解。量子搜索演算法,有時被稱為 Grover 的演算法,在未排序的資料庫中查找一個專案,具有 2 個  $n$  項,滿足任何給定條件,可以給出二次加速,是已知的最好的一個。因此,我們描述了如何使用 Open QASM 的 2.0 版本編寫量子程序來實現量子搜索演算法,以便解決各種應用。

#### 3.1 搜尋問題介紹

假定 set  $X$  等於  $\{x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n \mid \forall x_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq n\}$ 。從  $X$  集其  $n$  位元的最小元素是  $x_1^0 x_2^0 \dots x_{n-1}^0 x_n^0$  與  $n$  位元的最大元素是  $x_1^1 x_2^1 \dots x_{n-1}^1 x_n^1$ 。為方便表示,在  $X$  集中,具有  $n$  位的最小元素的數值為 0,具  $n$  位的最大元素的數值為  $2^n - 1$ 。我們將設置  $X$  視為包含具  $n$  位元的  $2^n$  項(元素)的未排序資料庫。

搜尋問題是從集  $X \{x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n \mid \forall x_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq n\}$ ，也是一個具  $2^n$  個元素的未排序資料庫， $M$  個元素滿足任何給定條件，我們希望找到  $M$  個解決方法之一，其  $1 \leq M \leq 2^n$ 。搜索問題的一個常見表述如下。對於任何給定的 oracular 函數  $O_f: \{x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n \mid \forall x_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq n\} \rightarrow \{0, 1\}$ ，有  $N$  位從其域 (稱為  $\lambda_M$ ) 的  $M$  個輸入，滿足條件  $O_f(\lambda_M) = 1$ ，而對於來自同一域 ( $\omega$ , for  $0 \leq \omega \leq 2^n - 1$  和  $\omega \neq \lambda_M$ ) 的  $n$  位所有其他輸入， $O_f(\omega) = 0$  搜尋問題是找到  $M$  個解決方案之一。

搜尋問題最有效的經典演算法是逐個檢查網域中的項(元素)是否滿足  $O_f(\lambda_M) = 1$ 。如果項(元素)滿足  $O_f(\lambda_M) = 1$  的要求條件,則最有效的經典演算法將終止。否則,它將繼續檢查下一項(元素)是否滿足  $O_f(\lambda_M) = 1$ ,直到找到答案。在搜索問題中,解決方案的數量是最糟糕的情況。對於搜索問題中最糟糕的情況,查找所需答案(項)的最佳時間複雜性為  $O(1)$ ,查找所需答案(項)的平均時間複雜性為  $O(\frac{2^n+1}{2})$ ，查找所需答案(項)的最壞時間複雜性為  $O(2^n)$ 。

## 3.2 可存取性問題介紹

讓我們考慮一個範例  $F(x_1, x_2) = (x_2 \vee x_1) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1) \wedge (x_1)$ 。兩個變數  $x_2$  和  $x_1$  是兩個布林變數,其值可以是 0 或 1。我們假設 0 是"false", 1 是"true"。符號“ $\vee$ ”是"邏輯 或"操作,符號“ $\wedge$ ”是"邏輯 和"操作。因此,布林公式  $x_2 \vee x_1$  僅在  $x_2$  和  $x_1$  均為 0 時為 0;布林公式  $x_2 \wedge x_1$  僅在  $x_2$  和  $x_1$  均為 1 時為 1。我們將布林公式  $x_2 \vee x_1$  視為一個子句,我們將布林公式  $x_2 \wedge x_1$  視為另一個子句。

我們給  $\bar{x}_1$  代表  $x_1$  的"反值",我們給  $\bar{x}_2$  代表  $x_2$  的"反值"。當  $x_1$  為 0 時,布林公式  $\bar{x}_1$  為 1, 當  $x_1$  為 1 則  $\bar{x}_1$  為 0。當  $x_2$  為 0 時,布林公式  $\bar{x}_2$  為 1, 當  $x_2$  為 1 則  $\bar{x}_2$  為 0。當然,我們也將布林公式  $\bar{x}_1$  和布林公式  $\bar{x}_2$  視為兩個不同的子句。這一可適應性問題,是一個 **NP - complete** 問題是找到  $x_2$  和  $x_1$  的布林值,使公式  $F(x_1, x_2)$  是 true 等於 1。

在此範例中,答案是  $x_2 = 0$  和  $x_1 = 1$ 。在公式  $F(x_1, x_2)$  中,它實際上包括三個子句:第一個子句是“ $(x_2 \vee x_1)$ ”,第二個子句是“ $(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1)$ ”,第三個子句是“ $(x_1)$ ”。子句是組成  $x_1 \vee x_2 \vee \dots x_{n-1} \vee x_n$  的公式,其中每個變數  $x_k$  for  $1 \leq k \leq n$  是布林變數或其反值。由於實現此示例的量子程式使用更多的量子位元,在後端 *ibmqx4* 中使用超過 5 個量子位元,IBM 的量子電腦中有五個量子位元,因此我們僅使用此示例來解釋什麼是可適應性問題。接下來,我們將**定義 3-1** 引入可適應性問題。

**定義 3-1:** 一般來說,一個可適應性問題包含形式  $C_1 \wedge C_2 \dots \wedge C_m$  的布林公式,其中每句  $C_j$  for  $1 \leq j \leq m$  是一個組成  $x_1 \vee x_2 \vee \dots x_{n-1} \vee x_n$ , 其每個布林變數  $x_k$  to  $1 \leq k \leq n$ , 接下來,問題是查找每個布林變數值,使整個公式具有值 1。這與查找每個布林變數的值相同,這些值使每個子句具有值 1。

從**定義 3-1** 得知,  $n$  個布林變數和  $m$  個子句的可適應性問題,我們認為  $m$  個子句是任何給定 oracular 功能  $O_f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$  和認定  $n$  個布林變數的  $2^n$  個輸入為它的域  $\{x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n \mid \forall x_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq n\}$ 。  $n$  個布林變數和  $m$  個子句的可適應性問題是從它的域找到  $n$  個位元的輸入,使整個公式  $O_f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$  具值 1。也就是說,  $n$  個布林變數和  $m$  個子句的可適應性問題實際上是一種搜索問題。

### 3.2.1 解決可適應性問題的流程圖

從**定義 3-1**得知，一個可適應性問題包含組成  $C_1 \wedge C_2 \dots \wedge C_m$  的布林公式，其中每個子句  $C_j$  for  $1 \leq j \leq m$  是由  $x_1 \vee x_2 \vee \dots x_{n-1} \vee x_n$  組成的公式，其每個布林變數  $x_k$  to  $1 \leq k \leq n$ 。解決  $n$  個布林變數和  $m$  子句的可適應性問題，我們需要使用輔助布林變數  $r_{j,k}$  for  $1 \leq j \leq m$  and  $0 \leq k \leq n$  和輔助布林變數  $s_j$  for  $0 \leq j \leq m$ 。由於我們使用輔助布林變數  $r_{j,0}$  for  $1 \leq j \leq m$  作為每個子句中第一個邏輯或操作 (“ $\vee$ ”) 的第一個操作數，因此每個輔助布林變數  $r_{j,0}$  for  $1 \leq j \leq m$  的初始值設置為零 (0)。也就是說，此設置不會更改每個子句中第一個邏輯或操作的正確結果。我們使用 **CCNOT** 閘和 **NOT** 閘在每個子句中實現邏輯或操作，我們應用輔助布林變數  $r_{j,k}$  for  $1 \leq j \leq m$  and  $1 \leq k \leq n$  來存儲在每個子句中實現邏輯或操作的結果。這表明每個輔助布林變數  $r_{j,k}$  for  $1 \leq j \leq m$  and  $1 \leq k \leq n$  實際上是實現邏輯或操作的 **CCNOT** 閘的目標位元。因此，每個輔助布林變數  $r_{j,k}$  for  $1 \leq j \leq m$  and  $1 \leq k \leq n$  初始值設置為一 (1)。

我們使用輔助布林變數  $s_0$  作為第一個邏輯和操作 (“ $\wedge$ ”) 在形式  $C_1 \wedge C_2 \dots \wedge C_m$  的布林公式的第一個操作數。輔助布林變數  $s_0$  的初始值設定為一 (1)。這表示這個設定不會變更  $C_1 \wedge C_2 \dots \wedge C_m$  中第一個邏輯和操作的正確結果。我們使用 **CCNOT** 閘在  $C_1 \wedge C_2 \dots \wedge C_m$  中實現邏輯和操作，我們應用輔助布林變數  $s_j$  for  $1 \leq j \leq m$  來儲存在  $C_1 \wedge C_2 \dots \wedge C_m$  中實現邏輯和操作的結果。也就是說，每個輔助布林變數  $s_j$  for  $1 \leq j \leq m$  實際上是實現邏輯和操作的 **CCNOT** 閘的目標位元。因此，每個輔助布林變數  $s_j$  for  $1 \leq j \leq m$  的初始值設置為零 (0)。為了便於我們的演講，我們假設  $|C_j|$  是  $j$ th 子句  $C_j$  中的布林變數。

圖 3.1 是 使用  $n$  布林變數和  $m$  子句解決可適應性問題的流程圖。在圖 3.1 中，在語句  $S_1$  中，它將第一個迴圈的索引變數  $j$  集為一 (1)。接下來，在語句  $S_2$  中，它執行第一個循環的條件判斷。如果  $j$  的值小於或等於  $m$  的值，則下一個執行指令是語句  $S_3$ 。否則，在語句  $S_9$  中，它執行結束指令以終止查找值 of 每個布林變數的任務，以便整個公式具有值 1，這與查找每個布林變數的值相同，使每個子句具有值 1。

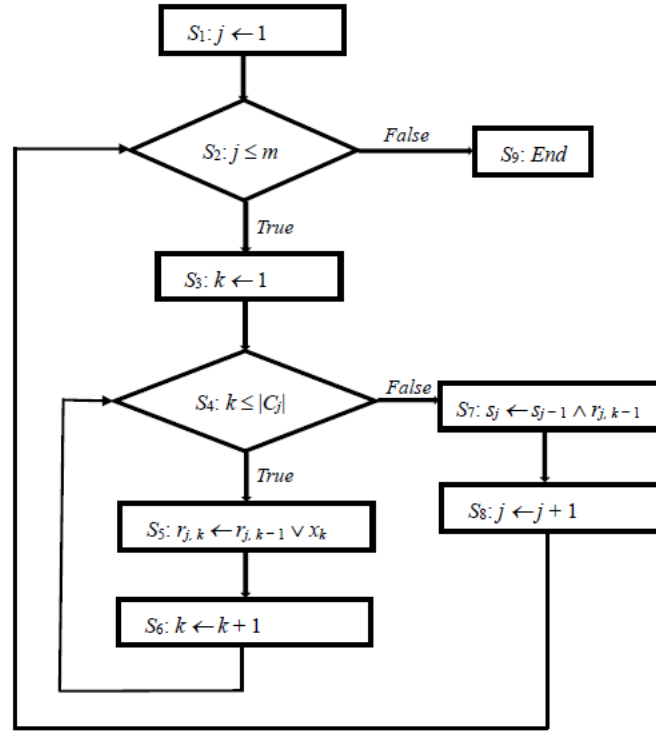


圖 3.1:使用  $n$  布爾變數和  $m$  子句解決可適應性問題的流程圖。

語句  $S_3$  它將第二個迴圈的索引變數  $k$  設置為一 (1)。接下來,在語句  $S_4$  中,它執行第二循環的條件判斷。如果  $k$  的值小於或等於  $j$ th 子句  $C_j$  中的布林變數,則下一個執行指令是語句  $S_5$ 。否則,下一個執行的指令是語句  $S_7$ 。在敘述  $S_5$  中,它實現邏輯或操作“ $r_{j,k} \leftarrow r_{j,k-1} \vee x_k$ ”,即  $j$ th 子句  $C_j$  中的邏輯或操作  $x_k$ 。布爾變數  $r_{j,k-1}$  是邏輯或操作的第一個操作數,並存儲上一個邏輯或操作的結果。布爾變數  $x_k$  是邏輯或操作的第二個操作數。布林變數  $r_{j,k}$  在  $j$ th 子句  $C_j$  中儲存到  $k$ th 邏輯或操作的結果。接下來,語句  $S_6$  它將索引變數  $k$  的值增加到第二個迴圈。重複執行語句  $S_4$  通過語句  $S_6$  直到語句  $S_4$  中的條件判斷變為 *false* 值。

在第二個循環中的索引變數  $k$  的值大於  $j$ th 子句  $C_j$  中的布林變數時,下一個執行指令是敘述  $S_7$ 。在語句  $S_7$  中,它在  $C_1 \wedge C_2 \dots \wedge C_m$  中執行邏輯和操作“ $s_j \leftarrow s_{j-1} \wedge r_{j,k-1}$ ”。布爾變數  $s_{j-1}$  是邏輯和操作的第一个操作數,並存儲上一個邏輯和操作的結果。因為  $k$  的值等於  $|C_j| + 1$ ,值  $(k - 1)$  等於  $|C_j|$  布林變數  $r_{j,k-1}$  是邏輯與操作的第二個操作數,並儲存在  $j$ th 子句  $C_j$  中實現形式  $x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_{n-1} \vee x_n$  的公式的結果。布林變數  $s_j$  在  $C_1 \wedge C_2 \dots \wedge C_m$  中儲存到  $j$ th 邏輯和操作的結果。接下來,語句  $S_8$  它將索引變數  $j$  的值增加到第一個迴圈。重複執行語句  $S_2$  通過語句  $S_8$  直到語句  $S_2$  中的條件判斷變為 *false* 值。因為從定義 3-1 每個子句  $C_j$  for  $1 \leq j \leq m$  是由  $x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_{n-1} \vee x_n$  組成的公式,從圖 3.1 的邏輯和操作以及邏輯或操作的總數是  $m$  個邏輯和操作和  $(\sum_{j=1}^m |C_j|) = (m \times n)$  邏輯或操作。這是為  $n$

布林變數的  $2^n$  個輸入的一個一次  $m$  個子句的成本。因此,  $m$  對於  $n$  布林變數的  $2^n$  輸入, 實現  $m$  個子句  $2^n$  倍的成本 是  $(2^n \times m)$  邏輯和操作以及  $(2^n \times m \times n)$  邏輯或操作。

### 3.2.2 可適應性問題的數據依賴性分析

數據依賴性產生於訪問或修改同一資源的兩個語句。數據依賴性分析是判斷重新排序或並行化語句是否安全。在  $n$  個布林變數和  $m$  個子句的可適應性問題中, 它由  $2^n$  個輸入組成, 它們是  $n$  個布林變數的  $2^n$  組合狀態。第一個輸入是  $x_1^0 x_2^0 \dots x_{n-1}^0 x_n^0$  第二個輸入是  $x_1^0 x_2^0 \dots x_{n-1}^0 x_n^1$  最後一個輸入是  $x_1^1 x_2^1 \dots x_{n-1}^1 x_n^1$ 。每個輸入都需要完成圖 3.1 中的這些操作。每個輸入需要使用  $(m \times (n+1))$  要儲存的  $r_{j,k}$  for  $1 \leq j \leq m$  與  $0 \leq k \leq n$  與  $(m+1)$  協助布林變數  $s_j$  for  $0 \leq j \leq m$ 。由於  $n$  布林變數的  $2^n$  個輸入實現圖 3.1 中的這些操作, 以不訪問或修改相同的輸入和相同的輔助布林變數, 因此我們可以並行化它們, 而不會有任何錯誤。

讓我們考慮另一個示例, 即  $F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$ , 其中兩個變數  $x_1$  和  $x_2$  是兩個布林變數, 其值可以是 0 或 1。在公式  $F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$  中, 第一個子句包含  $(x_1)$  第二個子句包括  $(x_2)$ 。它對於布林公式  $F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$  的可適應性問題, 具有兩個布林變數  $x_1$  和  $x_2$ , 是查找每個布林變數的值, 以便整個公式具有值 1。這與查找每個布林變數的值相同, 這些值使每個子句具有值 1。

我們認為針對有兩個布林變數  $x_1$  和  $x_2$  的公式  $F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$  的可適應性問題, 是一個給定任何 oracular 函數  $O_f$  的搜尋問題, 其布林公式為  $F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$ , 其域是  $\{x_1 x_2 \mid \forall x_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq 2\}$ , 其範圍為  $\{0, 1\}$ , 在給定的 oracular 函數  $O_f = F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$  的搜索問題中, 有來自其域的兩個位的  $M$  輸入, 稱為  $\lambda_M = x_1 x_2$ , 滿足條件  $O_f(\lambda_M) = O_f(x_1 x_2) = F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2 = 1$ 。對於來自同一域的兩個位的所有其他輸入  $\omega = x_1 x_2$ , for  $0 \leq \omega \leq 2^2 - 1$  和  $\omega \neq \lambda_M$ ,  $O_f(\omega) = O_f(x_1 x_2) = F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2 = 0$ 。搜尋問題是找到  $M$  個解決方案之一, 即查找每個布林變數的值, 以便整個公式具有值 1。這與尋找每個布林變數的值相同, 這些值使每個子句具有值 1。

從網域  $\{x_1 x_2 \mid \forall x_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq 2\}$  的布林公式  $F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$ , 有四個輸入  $x_1^0 x_2^0, x_1^0 x_2^1, x_1^1 x_2^0$  和  $x_1^1 x_2^1$ 。因為它包含兩個子句, 其中每個子句只包含一個布林變數, 因此每個輸入需要完成 “ $r_{1,1} \leftarrow r_{1,0}^0 \vee x_1$ ”, “ $s_1 \leftarrow s_0^1 \wedge r_{1,1}$ ”, “ $r_{2,1} \leftarrow r_{2,0}^0 \vee x_2$ ” 和 “ $s_2 \leftarrow s_1 \wedge r_{2,1}$ ”。實現邏輯或操作  $n$  “ $r_{1,1} \leftarrow r_{1,0}^0 \vee x_1$ ” 的結果實際上等於布林變數  $x_1$  的值 1。這就是說, 布林變數  $r_{1,1}$  儲存布林變數  $x_1$  的值。接下來, 邏輯 AND 操作 “ $s_1 \leftarrow s_0^1 \wedge r_{1,1}$ ” 等效於另一個邏輯 AND 操作 “ $s_1 \leftarrow s_0^1 \wedge x_1$ ”。由於

實現“ $s_1 \leftarrow s_0^1 \wedge x_1$ ”的結果，實際上等於布林變數  $x_1$  的值,因此布林變數  $s_{s1}$  儲存布林變數  $x_1$  的值。

接下來,實現邏輯或操作“ $r_{2,1} \leftarrow r_{2,0}^0 \vee x_2$ ”的結果實際上等於布林變數  $x_2$  的值<sub>2</sub>。這表示布林變數  $r_{2,1}$  儲存布林變數  $x_2$  的值。接下來,邏輯和操作“ $s_2 \leftarrow s_1 \wedge r_{2,1}$ ”等效於另一個邏輯和操作“ $s_2 \leftarrow x_1 \wedge x_2$ ”。這就是說,實現“ $r_{1,1} \leftarrow r_{1,0}^0 \vee x_1$ ”, “ $s_1 \leftarrow s_0^1 \wedge r_{1,1}$ ”, “ $r_{2,1} \leftarrow r_{2,0}^0 \vee x_2$ ” 和 “ $s_2 \leftarrow s_1 \wedge r_{2,1}$ ” 的結果和實現“ $s_2 \leftarrow x_1 \wedge x_2$ ”的結果相同。因此,實現  $F(x_1^0, x_2^0) = x_1^0 \wedge x_2^0$ ,  $F(x_1^0, x_2^1) = x_1^0 \wedge x_2^1$ ,  $F(x_1^1, x_2^0) = x_1^1 \wedge x_2^0$  和  $F(x_1^1, x_2^1) = x_1^1 \wedge x_2^1$  的四個結果分別為  $s_2^0$  (false),  $s_2^0$  (false),  $s_2^0$  (false) 和  $s_2^1$  (true), 由於兩個布爾變數的  $2^2$  個輸入實現上述指令,以不訪問或修改相同的輸入和相同的輔助布爾變數,因此我們可以並行化它們,而不會有任何錯誤。

### 3.2.3 解決可適應性問題實例的解決方案空間

對於給定的 oracular 函數  $O_f = F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$  的搜索問題,其域為  $\{x_1 x_2 | \forall x_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq 2\}$  其範圍為  $\{0,1\}$ 。我們認為其網域是其解決方案空間,其中有四種可能的選擇,滿足  $O_f = F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2 = 1$ 。我們使用四維 Hilbert 空間的基礎  $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$  來構造解決方案空間  $\{x_1 x_2 | \forall x_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq 2\}$ 。我們使用  $(1, 0, 0, 0)$  來編碼布林變數  $x_1^0$  和布林變數  $x_2^0$ 。接下來,我們使用  $(0, 1, 0, 0)$  對布林變數  $x_1^1$  和布林變數  $x_2^0$  進行編碼。我們套用  $(0, 0, 1, 0)$  來編碼布林變數  $x_1^0$  和布林變數  $x_2^1$ 。最後,我們使用  $(0, 0, 0, 1)$  對布林變數  $x_1^1$  和布林變數  $x_2^1$  進行編碼。

我們使用每個元素的線性組合,基礎是  $\frac{1}{\sqrt{2^2}} \times (1, 0, 0, 0) + \frac{1}{\sqrt{2^2}} \times (0, 1, 0, 0) + \frac{1}{\sqrt{2^2}} \times (0, 0, 1, 0) + \frac{1}{\sqrt{2^2}} \times (0, 0, 0, 1) = (\frac{1}{\sqrt{2^2}}, \frac{1}{\sqrt{2^2}}, \frac{1}{\sqrt{2^2}}, \frac{1}{\sqrt{2^2}})$ , 構造解決方案空間  $\{x_1 x_2 | \forall x_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq 2\}$ 。每個可能選擇的振幅全部,每個振幅的絕對值的  $\frac{1}{\sqrt{2^2}}$  平方之和為 1。由於向量的長度為 1,因此它是一個單位向量。也就是說,我們使用單位向量對所有滿足  $O_f = F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$  的可能選項進行編碼。我們將每個振幅的絕對值的平方稱為滿足給定的任地函數  $O_f = F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$  的該選擇的成本(成功概率)。答案的成本(成功概率)儘快接近一個。

### 3.2.4 將解決方案空間實現到可存取性問題的實體

在清單 3.1 中,後端 *ibmqx4* 中帶有 5 個量子位元的 IBM 量子電腦程式是用  $F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$  解決可適應性問題的實例,其中我們說明瞭如何編寫量子程式來查找每個布爾變數的值,以便整個公式具有值 1。圖 3.2 是構建解決方案空間的量子電路,以用  $F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$  的可適應性問題為例。清單 3.1 第一行的語句 "OPENQASM 2.0" 表示程式是使用 Open QASM 版本 2.0 編寫的。接下來,他的聲明「包括」*qelib1.inc*」;在清單 3.1 的第二行是繼續解析檔 ""*qelib1.inc*",彷彿檔的內容粘貼在包含語句的位置,其中檔"*qelib1.inc*"是量子體驗(QE)標準頭和 t 他路徑是相對於當前工作目錄。

```
1. OPENQASM 2.0;
2. include "qelib1.inc";
3. qreg q[5];
4. creg c[5];
5. x q[0];
6. h q[3];
7. h q[4];
8. h q[0];
```

清單 3.1:用  $F(x_1, x_2)$  解決可適應性問題的實例的程式  $F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$ .

接下來,語句"*qreg q[5];*"在清單 3.1 的第三行,是聲明程式中有五個量子位元。在圖 3.2 的左上部,五個量子位元隨後為 *q[0]*、*q[1]*、*q[2]*、*q[3]* 和 *q[4]*。每個量子位元的初始值設置為  $|0\rangle$ 。我們使用量子位元 *q[3]* 來編碼布爾變數  $x_1$ 。我們利用量子位元 *q[4]* 來編碼布爾變數  $x_2$ 。我們應用量子位元 *q[2]* 來編碼輔助布爾變數  $s_2$ 。我們使用量子位元 *q[0]* 作為輔助工作位。我們不使用量子位元 *q[1]*。



圖 3.2:用  $F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$  構建解決方案空間的量子電路,以可適應性問題實例。

為了便於我們解釋  $q[k]^0$  for  $0 \leq k \leq 4$  的值 0,  $q[k]^1$  for  $0 \leq k \leq 4$  的值 1。同樣,為了便於我們解釋,  $F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$  將解決方案空間建構到可適應性問題的實例  $F$  的初始狀態向量如下所示:

$$|\Phi_0\rangle = |q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle |q[2]^0\rangle |q[1]^0\rangle |q[0]^0\rangle = |0\rangle |0\rangle |0\rangle |0\rangle |0\rangle = |00000\rangle$$

然後,語句"creg c[5]"在清單 3.1 的第四行,是宣告程式中有五個經典位元。在圖 3.2 的左下角,五個經典位元分別是 c[0]、c[1]、c[2]、c[3] 和 c[4]。每個經典位元的初始值設置為 0。

N 分,三個語句"x q[0];", "h q[3];"和"h q[4];" 在清單 3.1 的第五到七號線,在圖 3.2 中實現量子電路第一個時隙的一個 X 閘(一個 NOT 門)和兩個 Hadamard 閘。

語句"x q[0];"實際上完成  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (|1\rangle)$ 。這表明語句"x q[0];"在清單 3.1 的第五行,將  $|q[0]^0\rangle (|0\rangle)$  轉換為  $|q[0]^1\rangle (|1\rangle)$ 。兩個語句"h q[3];"和"h q[4];"

兩者實際完成  $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$(|0\rangle + |1\rangle)$ 這就是說將 q[3]從一個狀態  $|0\rangle$  轉換為另一個狀態  $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ (其疊

加 superposition)和將 q[4] 從一個狀態  $|0\rangle$ ; 轉換為另一個狀態  $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ (其

疊加 superposition)完成。因此,兩個量子位元 q[4]和 q[3]的疊加是  $(\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle))$

$(\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)) = \frac{1}{2} (|0\rangle |0\rangle + |0\rangle |1\rangle + |1\rangle |0\rangle + |1\rangle |1\rangle) = \frac{1}{2} (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle +$

$|11\rangle)$  因為在圖 3.2 量子電路的第一個時隙中,量子閘沒有對量子位元 q[2]和 q[1]的作用,因此其當前狀態  $|q[2]^0\rangle$  和  $|q[1]^0\rangle$  不會改變。也就是說,我們獲得了以下新的狀態向量

$$\begin{aligned} |\Phi_1\rangle &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (|q[4]^0\rangle + |q[4]^1\rangle) \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (|q[3]^0\rangle + |q[3]^1\rangle) \right) (|q[2]^0\rangle |q[1]^0\rangle |q[0]^1\rangle) \\ &= \frac{1}{2} (|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle) (|q[2]^0\rangle \\ &\quad |q[1]^0\rangle |q[0]^1\rangle) \\ &= \frac{1}{2} (|0\rangle |0\rangle + |0\rangle |1\rangle + |1\rangle |0\rangle + |1\rangle |1\rangle) (|0\rangle |0\rangle |1\rangle). \end{aligned}$$

接著 語句"h q[0];"在清單 3.1 的第 8 行,圖 3.2 中實現量子電路第二個時隙的

一個哈達德門。語句"h q[0];" 實際上完成  $s \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle)$ 。這表明完成將  $q[0]$  從一個狀態  $|1\rangle$

轉換為另一種狀態  $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle)$ (其疊加 superposition)。因為在圖 3.2 量子電路的第二個時隙中,沒有量子閘對量子位元  $q[4]$ 通過  $q[1]$ 執行,因此其當前狀態不會改變。這表明我們獲取了以下新的狀態向量

$$\begin{aligned} |\Phi_2\rangle &= \left( \frac{1}{2} (|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle) \right) (|q[2]^0\rangle \\ &\quad |q[1]^0\rangle) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (|q[0]^0\rangle - |q[0]^1\rangle) \right) \\ &= \left( \frac{1}{2} (|0\rangle |0\rangle + |0\rangle |1\rangle + |1\rangle |0\rangle + |1\rangle |1\rangle) \right) (|0\rangle |0\rangle) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) \right). \end{aligned}$$

在新的狀態向量中  $|\Phi_2\rangle$ , 狀態 $|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle$  編碼布林變數  $x_1^0$  和布林變數  $x_2^0$ 。狀態  $|q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle$  編碼布林變數  $x_1^1$  和布林變數  $x_2^0$ 。狀態  $|q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle$ 編碼布林變數  $x_1^0$  和布林變數  $x_2^1$ 。狀態  $|q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle$  編碼布林變數  $x_1^1$  和布林變數  $x_2^1$ 。每個選擇的振幅是  $\frac{1}{\sqrt{2^2}}$  和成本(成功的可能性)成為每個選擇的答案是

相同的,等於  $\frac{1}{2^2} = 1/4$

### 3.2.5 Oracle 對可適應性問題的實例

Oracle 是能夠識別給定的 oracular 功能  $O_f = F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$  的可適應性問題的解決方案。Oracle 將答案的概率振幅乘以 -1,並且保持不變任何其他振幅。使用給定的 oracular 函數  $O_f = F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$  is a  $(2^2 \times 2^2)$  解決可適應性問題的

Oracle 是  $(2^2 \times 2^2)$ 矩陣等於  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$ 。

我們假設 $(2^2 \times 2^2)$ 矩陣  $B^+$ 是  $B$  的偶聯轉置。由於  $B$  的轉置等於  $B$ ,且  $B$  的轉置中的每個元素都是實數,因此  $B$  的偶聯轉置  $B$  也等於  $B$ 。因此,我們取得  $B^+ B$ 。因為  $B$  與  $B^+$  幾乎是 $(2^2 \times 2^2)$ 識別矩陣,  $B \times B^+ = I_{2^2 \times 2^2}$ 與  $B^+ \times B = I_{2^2 \times 2^2}$ , 因此,我們獲得  $B \times B^+ = B^+ \times B$ 。也就是說,它是一個統一矩陣(運算子)來解決給定 oracular 函數  $O_f = F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$  的可適應性問題。在可適應性問題中實現

給定的 oracular 函數  $O_f = F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$  等效於實現  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \times$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2^2}} \end{pmatrix}_{4 \times 1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2^2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2^2}} \end{pmatrix}_{4 \times 1} = \frac{1}{\sqrt{2^2}} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{4 \times 1} + \frac{1}{\sqrt{2^2}} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{4 \times 1} + \frac{1}{\sqrt{2^2}} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{4 \times 1} +$$

$$\frac{-1}{\sqrt{2^2}} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{4 \times 1} = \frac{1}{\sqrt{2^2}} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2^2}} |01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2^2}} |10\rangle + \frac{-1}{\sqrt{2^2}} |11\rangle.$$

四個計算基礎向量  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{4 \times 1}$  ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{4 \times 1}$  ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{4 \times 1}$  和  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{4 \times 1}$  和編碼四個狀態

$|00\rangle$ 、 $|01\rangle$ 、 $|10\rangle$  和  $|11\rangle$  及其當前振幅分別為 $(\frac{1}{\sqrt{2^2}})$ ,  $(\frac{1}{\sqrt{2^2}})$ ,  $(\frac{1}{\sqrt{2^2}})$  和 $(\frac{-1}{\sqrt{2^2}})$ 。狀態

$|00\rangle (|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle)$  與振幅  $(\frac{1}{\sqrt{2^2}})$  編碼布林變數  $x_1^0$  和布林變數  $x_2^0$ 。狀態  $|01\rangle$

$(|q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle)$  與振幅  $(\frac{1}{\sqrt{2^2}})$  編碼布林變數  $x_1^1$  和布林變數  $x_2^0$ 。狀態  $|10\rangle$

$(|q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle)$  與振幅 $(\frac{1}{\sqrt{2^2}})$  編碼布林變數  $x_1^0$  和布林變數  $x_2^1$ 。狀態 $|11\rangle$

$(|q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle)$  與振幅  $(\frac{-1}{\sqrt{2^2}})$  編碼布林變數  $x_1^1$  和布爾變數  $x_2^1$ 。這就是

說,Oracle 多倍表示答案的概率振幅與布爾變數  $x_1^1$  和布爾變數  $x_2^1$  乘-1,並且保留任何其他振幅不變。

### 3.2.6 實現可適應性問題的實例的 Oracle

我們使用一個 **CCNOT** 門來實現給定的 oracular 函數  $O_f = F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$  的可適應性問題。我們使用量子位元  $q[3]$ 來編碼布爾變數  $x_1$ ,我們使用量子位元  $q[4]$ 來編碼布爾變數  $x_2$ ,我們使用量子位元  $q[2]$ 來編碼布爾變數  $s_2$ 。因此,量子位元  $q[3]$ 、 $q[4]$ 、 $q[2]$ 分別是 **CCNOT** 門的第一控制位、第二控制位和 **CCNOT** 閘的目標位元。由於我們使用 **CCNOT** 門來實現邏輯和操作,因此量子位元  $q[2]$  的初始值設置為  $|0\rangle$ 。

從清單 3.1 中的第九行到第二十三行,有十五個語句。它們隨後被“h q[2];”, “cx q[4],q[2];”, “tdg q[2];”, “cx q[3],q[2];”, “t q[2];”, “cx q[4],q[2];”, “tdg q[2];”, “cx q[3],q[2];”, “t q[4];”, “t q[2];”, “cx q[3],q[4];”, “h q[2];”, “t q[3];”, “tdg q[4];” 和“cx q[3], q[4];”。它們實現 **CCNOT** 門,完成給定的 oracular 函數  $O_f = F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$ 。圖 3.3 是電路實現 Oracle 到可適應性問題的實例

### Listing 3.1 continued...

// We use the following *fifteen* statements to implement a **CCNOT** gate.

```

9  h q[2];
10 cx q[4],q[2];
11 tdg q[2];
12 cx q[3],q[2];
13 t q[2];
14 cx q[4],q[2];
15 tdg q[2];
16 cx q[3],q[2];
17 t q[4];
18 t q[2];
19 cx q[3],q[4];
20 h q[2];
21 t q[3];
22 tdg q[4];
23 cx q[3], q[4];

```

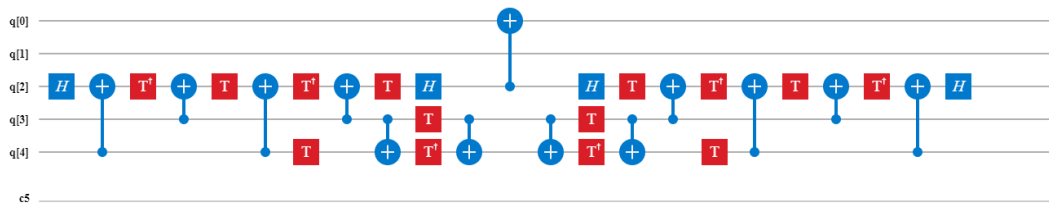


圖 3.3: 實現 Oracle 到可適應性問題  $F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$  的實例的量子電路。

$F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$ . 它們採用狀態向量  $|\Phi_2\rangle = (\frac{1}{2} (|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle +$

$|q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle)) (|q[2]^0\rangle |q[1]^0\rangle) (\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[0]^0\rangle - |q[0]^1\rangle))$  作為輸入。

在它們實際實施六個 **CNOT** 閘、兩個 Hadamard 閘、三個 **T<sup>+</sup>** 閘和四個 **T** 閘後，從第一個時隙到圖 3.3 中的第 11 個時隙，我們獲得以下新的狀態矢量

$$\begin{aligned} |\Phi_3\rangle &= (\frac{1}{2} (|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle |q[2]^0\rangle + |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle |q[2]^0\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle |q[2]^0\rangle + \\ &\quad |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle |q[2]^1\rangle)) (|q[1]^0\rangle) (\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[0]^0\rangle - |q[0]^1\rangle)) \\ &= (\frac{1}{2} (|0\rangle |0\rangle |0\rangle + |0\rangle |1\rangle |0\rangle + |1\rangle |0\rangle |0\rangle + |1\rangle |1\rangle |1\rangle)) (|0\rangle) (\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle)). \end{aligned}$$

接著，從清單 3.1 中的第 24 行，語句“**cx q[2],q[0];**”採用新的狀態向量  $|\Phi_3\rangle$  作為其輸入。它將答案的概率振幅

#### Listing 3.1 continued...

```
// The Oracle multiplies the probability amplitude of the answer  $x_1^1 x_2^1$  by -1 and
// leaves any other amplitude unchanged.
```

```
24. cx q[2],q[0];
```

$|q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle$  編碼  $x_1^1 x_2^1$  乘以 -1，並且保留任何其他振幅不變。也就是說，在陳述“**cx q[2],q[0];**”在圖 3.3 中的第十二個時間段中實現 **CNOT** 門後，我們獲得以下新的狀態向量

$$\begin{aligned} |\Phi_4\rangle &= (\frac{1}{2} (|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle |q[2]^0\rangle + |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle |q[2]^0\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle |q[2]^0\rangle + \\ &\quad (-1) |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle |q[2]^1\rangle)) (|q[1]^0\rangle) (\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[0]^0\rangle - |q[0]^1\rangle)) \\ &= (\frac{1}{2} (|0\rangle |0\rangle |0\rangle + |0\rangle |1\rangle |0\rangle + |1\rangle |0\rangle |0\rangle + (-1) |1\rangle |1\rangle |1\rangle)) (|0\rangle) (\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - \\ &\quad |1\rangle)). \end{aligned}$$

由於量子運算本質上是可逆的，因此執行實現 **CCNOT** 閘的反向順序可以將輔助曲原子位還原到其初始狀態。從清單 3.1 的第二十五行到第 39 行，有十五個語句。它們是“**cx q[3],q[4];**”，“**tdg q[4];**”，“**t q[3];**”，“**h q[2];**”，“**cx q[3],q[4];**”，“**t q[2];**”，“**t q[4];**”，“**cx q[3],q[2];**”，“**tdg q[2];**”，“**cx q[4],q[2];**”，“**t q[2];**”，“**cx q[3],q[2];**”，“**tdg**

q[2];”, “cx q[4],q[2];” 和“h q[2];”。它們執行相反的實現順序

**Listing 3.1 continued...**

```
// Because quantum operations are reversible by nature, executing the reversed
// order of implementing the CCNOT gate can restore the auxiliary quantum bits
// to their initial states.
```

```
25. cx q[3],q[4];
26. tdg q[4];
27. t q[3];
28. h q[2];
29. cx q[3],q[4];
30. t q[2];
31. t q[4];
32. cx q[3],q[2];
33. tdg q[2];
34. cx q[4],q[2];
35. t q[2];
36. cx q[3],q[2];
37. tdg q[2];
38. cx q[4],q[2];
39. h q[2];
```

完成給定的 oracular 函數  $O_f = F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$  的 **CCNOT** 閘。它們採用新的狀態向量  $|\Phi_4\rangle$  作為他們的輸入。在它們實際完成六個 **CNOT** 閘、兩個 Hadamard 閘、三個 **T**<sup>†</sup> 閘和四個 **T** 閘後,從第十三個時隙通過圖 3.3 中的最後一個時隙,我們獲得以下新的狀態矢量 *last*

$$\begin{aligned}
 |\Phi_5\rangle &= \left(\frac{1}{2} (|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle + (-1) |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle)\right) \\
 &\quad (|q[2]^0\rangle |q[1]^0\rangle) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[0]^0\rangle - |q[0]^1\rangle)\right) \\
 &= \left(\frac{1}{2} (|0\rangle |0\rangle + |0\rangle |1\rangle + |1\rangle |0\rangle + (-1) |1\rangle |1\rangle)\right) (|0\rangle |0\rangle) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle)\right)..
 \end{aligned}$$

在狀態向量中  $|\Phi_2\rangle$ , 解決方案空間中每個元素的振幅  $\{x_1 x_2 | \forall x_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq 2\}$  是  $(1/2)$ 。在狀態向量中  $|\Phi_5\rangle$ , 三個元素的振幅  $x_1^0 x_2^0, x_1^0 x_2^1, x_1^1 x_2^0$  在

解決方案空間中是所有  $(1/2)$ , 元素  $x_1^1 x_2^1$  在解決方案空間的振幅是  $(-1/2)$ 。這表

明清單 3.1 中第 9 行至第 39 行的 31 語句完成 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2^2}} \end{pmatrix}_{4 \times 1},$$

即完成 Oracle 用給定的 oracular 函數  $O_f = F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$  解決的可適應性問題。

1

### 3.2.7 放大可適應性問題答案的振幅的 Grover Diffusion 操作

我們假定  $(2^n \times 1)$  向量  $|u\rangle$  是  $\begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{2^n,1} \end{pmatrix}_{2^n \times 1}$  另一個  $(2^n \times 1)$  向量  $|v\rangle$  是

$\begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,1} \\ \vdots \\ v_{2^n,1} \end{pmatrix}_{2^n \times 1}$ 。  $|v\rangle$  的轉置是  $(1 \times 2^n)$  向量, 是  $(v_{1,1} \ v_{1,2} \ \cdots \ v_{1,2^n})_{1 \times 2^n}$ 。定義

3-2 介紹了外部產品  $|u\rangle \langle v|$  兩個向量  $|u\rangle$  和  $|v\rangle$ 。

**定義 3-2:** 外部產品  $|u\rangle \langle v|$  兩個向量  $|u\rangle$  和  $|v\rangle$  是  $(2^n \times 2^n)$  矩陣  $W$ , 即

$$\begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{2^n,1} \end{pmatrix}_{2^n \times 1} \times \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \cdots & v_{1,2^n} \end{pmatrix}_{1 \times 2^n} = \begin{pmatrix} u_{1,1} \times v_{1,1} & \cdots & u_{1,1} \times v_{1,2^n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{2^n,1} \times v_{1,1} & \cdots & u_{2^n,1} \times v_{1,2^n} \end{pmatrix}_{2^n \times 2^n}.$$

我們假設  $H^{\otimes n}$  表示  $n$  個 Hadamard 閘,  $|0^{\otimes n}\rangle$  表示每個量子位元的值等於  $|0\rangle$  的  $n$  量子位元。使用單一運算符  $H^{\otimes n}$  操作  $n$  量子位元后,  $|0^{\otimes n}\rangle$  每個量子位元的狀態  $|0\rangle$  將轉換為其疊加 superposition  $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ 。這就是說, 對  $n$  量子位

元  $|0^{\otimes n}\rangle$  的疊加是  $|\psi\rangle = (\otimes_{k=1}^n (\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle))) = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} |k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}}$

$$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{2^n \times 1} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{2^n \times 1} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2^n}} \\ \frac{1}{\sqrt{2^n}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{2^n}} \end{pmatrix}_{2^n \times 1}, |\psi\rangle \text{ 是狀態的統一疊加, 是 } (2^n \times 1) \text{ 向}$$

量,其長度為 1。 × 這表示它是一個單位向量。

矩陣  $D$  是  $(2^n \times 2^n)$  矩陣定義 Grover 擴散運算符  $D$  如下:

$$D_{a,b} = \frac{2}{2^n} \text{ if } a \neq b \text{ 和 } D_{a,a} = \frac{2}{2^n} - 1.$$

擴散變換  $D$  可以作為實現  $D = 2 |\psi\rangle \langle \psi| - I_{2^n \times 2^n} = H^{\otimes n} (2 |0^{\otimes n}\rangle \langle 0^{\otimes n}| - I_{2^n \times 2^n}) H^{\otimes n}$ 。旋轉矩陣  $R$  是  $(2^n \times 2^n)$  矩陣定義相移運算符  $(2 |0^{\otimes n}\rangle \langle 0^{\otimes n}| - I_{2^n \times 2^n})$ , 如下所示:

$$R_{a,b} = 0 \text{ if } a \neq b; R_{a,a} = 1 \text{ if } a = 0; R_{a,a} = -1 \text{ if } a \neq 0.$$

這意味著相移器運算符  $(2 |0^{\otimes n}\rangle \langle 0^{\otimes n}| - I_{2^n \times 2^n})$  反轉除  $|0\rangle$  之外的所有狀態。事實證明,一個量子電路與相移運算符,  $2 |0^{\otimes n}\rangle \langle 0^{\otimes n}| - I_{2^n \times 2^n}$  反轉除  $|0\rangle$  夾在  $H^{\otimes n}$  間之間的所有狀態可以實現格羅夫擴散運算符  $D$ 。我們使用 定理 3-1 來表明 Grover 擴散運算符  $D = 2 |\psi\rangle \langle \psi| - I_{2^n \times 2^n} = H^{\otimes n} (2 |0^{\otimes n}\rangle \langle 0^{\otimes n}| - I_{2^n \times 2^n}) H^{\otimes n}$ ,  $H^{\otimes n}$  是一個單一運算符。

**定理 3-1:** 格羅夫擴散運算符,  $D = 2 |\psi\rangle \langle \psi| - I_{2^n \times 2^n} = H^{\otimes n} (2 |0^{\otimes n}\rangle \langle 0^{\otimes n}| - I_{2^n \times 2^n}) H^{\otimes n}$ ,  $H^{\otimes n}$  是單一運算符號。

**證明:**

具有  $|\psi\rangle \langle \psi|$  自身  $(2^n \times 1)$  向量  $|\psi\rangle$  的外部乘積會導致  $(2^n \times 2^n)$  矩陣  $V$ , 即

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2^n}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{2^n}} \end{pmatrix}_{2^n \times 1} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2^n}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{2^n}} \end{pmatrix}_{2^n \times 1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & \dots & \frac{1}{2^n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2^n} & \dots & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}_{2^n \times 2^n} \quad \text{從 } (2^n \times 2^n) \text{ 矩陣 } V \text{ 的兩}$$

倍中減去識別矩陣  $I_{2^n \times 2^n}$ , 我們取得一個新的  $(2^n \times 2^n)$  矩陣  $D$ , 即

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{2^n} & \dots & \frac{2}{2^n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{2}{2^n} & \dots & \frac{2}{2^n} \end{pmatrix}_{2^n \times 2^n} - \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{2^n \times 2^n} = \begin{pmatrix} \frac{2}{2^n} - 1 & \dots & \frac{2}{2^n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{2}{2^n} & \dots & \frac{2}{2^n} - 1 \end{pmatrix}_{2^n \times 2^n}$$

我們假設  $(2^n \times 2^n)$  矩陣  $D^+$  是  $D$  的偶聯轉置。我們假設  $N$  等於  $(1/2^n)$ 。由於  $D$  的轉置  $D^T$  等於  $D$ ，並且  $D$  的轉置中的每個元素都是實數，因此  $D$  的偶聯轉置  $D^+$  等於  $D$ 。因此，我們獲得  $D^+ = D$ 。由於  $(D \times D^+)_{a,a} = (\frac{2}{N} - 1)^2 + (\frac{2}{N})^2 \times (N - 1) = 1$  以及  $(D \times D^+)_{a,b} = (\frac{2}{N} - 1) \times (\frac{2}{N}) + (\frac{2}{N}) \times (\frac{2}{N} - 1) + (\frac{2}{N})^2 \times (N - 2) = 0$ ，我們取得  $D \times D^+ = I_{2^n \times 2^n}$ 。因為  $D^+ = D$  與  $D \times D^+ = I_{2^n \times 2^n}$ ，因此，我們取得  $D^+ \times D = D \times D^+ = I_{2^n \times 2^n}$ 。因為  $|\psi\rangle = H^{\otimes n} (|0^{\otimes n}\rangle)$  和  $I_{2^n \times 2^n} = H^{\otimes n} I_{2^n \times 2^n} H^{\otimes n}$ ，我們取得  $D = 2 |\psi\rangle \langle\psi| - I_{2^n \times 2^n} = 2 H^{\otimes n} |0^{\otimes n}\rangle \langle 0^{\otimes n}| H^{\otimes n} - I_{2^n \times 2^n} = 2 H^{\otimes n} |0^{\otimes n}\rangle \langle 0^{\otimes n}| H^{\otimes n} - H^{\otimes n} I_{2^n \times 2^n} H^{\otimes n} = H^{\otimes n} (2 |0^{\otimes n}\rangle \langle 0^{\otimes n}| - I_{2^n \times 2^n}) H^{\otimes n}$ ，從上面的陳述中，一下子推斷 Grover 擴散運算符  $D = 2 |\psi\rangle \langle\psi| - I_{2^n \times 2^n} = H^{\otimes n} (2 |0^{\otimes n}\rangle \langle 0^{\otimes n}| - I_{2^n \times 2^n}) H^{\otimes n}$  是一個統一運算符。

### 3.2.8 實施 Grover 擴散運算符，以放大可適應性問題實例中答案的振幅

新的狀態向量  $|\Phi_5\rangle$  是  $(\frac{1}{2} (|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle + (-1) |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle)) (|q[2]^0\rangle |q[1]^0\rangle) (\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[0]^0\rangle - |q[0]^1\rangle))$ ，它由兩個子系統組成。第一個子系統是  $(\frac{1}{2} (|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle + (-1) |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle))$ ，第二個子系統是  $(|q[2]^0\rangle |q[1]^0\rangle) (\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[0]^0\rangle - |q[0]^1\rangle))$ ，這兩個子系統是相互獨立的。使用給定的 oracular 函數  $O_f = F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$  放大每個答案的振幅，只需考慮新狀態向量中的第一個子系統  $|\Phi_5\rangle$ 。因為對於給定的 oracular 函

數  $O_f = F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$  的可適應性問題， $(2^2 \times 1)$  向量  $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2^2}} \\ -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2^2}} \end{pmatrix}_{4 \times 1}$  編碼新狀態

向量的第一個子系統  $|\Phi_5\rangle$  和  $\begin{pmatrix} \frac{2}{2^2}-1 & \frac{2}{2^2} & \frac{2}{2^2} & \frac{2}{2^2} \\ \frac{2}{2^2} & \frac{2}{2^2}-1 & \frac{2}{2^2} & \frac{2}{2^2} \\ \frac{2}{2^2} & \frac{2}{2^2} & \frac{2}{2^2}-1 & \frac{2}{2^2} \\ \frac{2}{2^2} & \frac{2}{2^2} & \frac{2}{2^2} & \frac{2}{2^2}-1 \end{pmatrix}$  是  $(2^2 \times 2^2)$

擴散運算子,一個放大的振幅是完成  $\begin{pmatrix} \frac{2}{2^2}-1 & \frac{2}{2^2} & \frac{2}{2^2} & \frac{2}{2^2} \\ \frac{2}{2^2} & \frac{2}{2^2}-1 & \frac{2}{2^2} & \frac{2}{2^2} \\ \frac{2}{2^2} & \frac{2}{2^2} & \frac{2}{2^2}-1 & \frac{2}{2^2} \\ \frac{2}{2^2} & \frac{2}{2^2} & \frac{2}{2^2} & \frac{2}{2^2}-1 \end{pmatrix} \times$

$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2^2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2^2}} \end{pmatrix}_{4 \times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{4 \times 1}$ 。也就是說,答案  $x_1^1 x_2^1$  的振幅為 1,其他三種可能選項  $x_1^0$

$x_2^0, x_1^0 x_2^1$  和  $x_1^1 x_2^0$  的振幅為零。

圖 3.4 中的量子電路實現了格羅夫擴散運算符,  $H^{\otimes 2}$

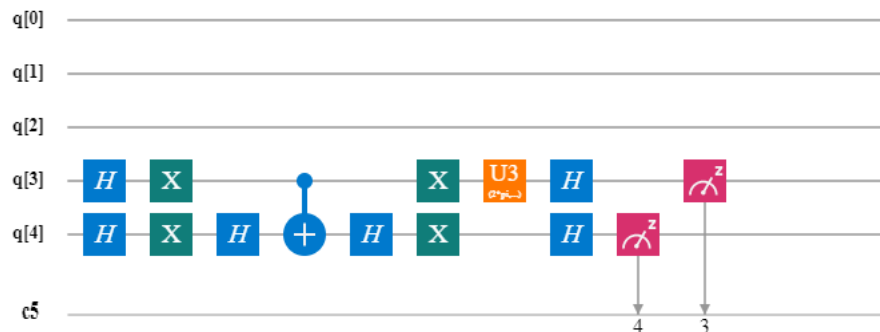


圖 3.4:實現 Grover 擴散運算符  $H^{\otimes 2} (2 |0^{\otimes 2}\rangle \langle 0^{\otimes 2}| - I_{2^2 \times 2^2}) H^{\otimes 2}$  的量子電路到可適應性問題  $F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$  的實例。

$(2 |0^{\otimes 2}\rangle \langle 0^{\otimes 2}| - I_{2^2 \times 2^2}) H^{\otimes 2}$ .40 行的語句“h q[3];”和“h q[4];”-

### Listing 3.1 continued...

```
//We complete the amplitude amplification of the answer.
```

```
40. h q[3];
```

```
41. h q[4];
```

通過 41 行在清單中 ing 3.1 完成第一個  $H^{\otimes 2}$  擴散運算子中的門,  $H^{\otimes 2} (2 |0^{\otimes 2}\rangle \langle 0^{\otimes 2}| - I_{2^2 \times 2^2}) H^{\otimes 2}$ . 他們需要  $(\frac{1}{2} (|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle + (-1) |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle))$  作為他們的輸入並在圖 3.4 的第一個時間段完成兩個 Hadamard 閘。狀態  $(\frac{1}{2} |q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle)$  轉換為狀態  $\frac{1}{4} (|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle)$ 。狀態  $(\frac{1}{2} |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle)$  轉換為狀態  $\frac{1}{4} (|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle - |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle - |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle)$ 。狀態  $(\frac{1}{2} |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle)$  轉換為狀態  $\frac{1}{4} (|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle - |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle - |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle)$ 。狀態  $(-\frac{1}{2} |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle)$  轉換為狀態  $-\frac{1}{4} (|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle - |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle - |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle)$ 。也就是說,我們獲得了以下新的狀態向量

$$|\Phi_6\rangle = (\frac{1}{2} (|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle + (-1) |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle))$$

接著,從清單 3.1 中第 42 行到 43 號,圖 3.4 的第二個時間段中的兩個語句"x q[3]"和"x q[4]"實現兩個 **NOT** 閘。它們在新狀態向量  $|\Phi_6\rangle$  採用  $(\frac{1}{2} (|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle + (-1) |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle))$  作為他們的輸入。狀態  $(\frac{1}{2} |q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle)$  轉換為

#### Listing 3.1 continued...

// We complete phase shifters.

42. x q[3];

43. x q[4];

狀態  $\frac{1}{2} (|q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle)$ 。狀態  $(\frac{1}{2} |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle)$  轉換為狀態  $\frac{1}{2} (|q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle)$ 。

狀態  $(\frac{1}{2} |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle)$  轉換為狀態  $\frac{1}{2} (|q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle)$ 。狀態  $(-\frac{1}{2} |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle)$

轉換為狀態  $-\frac{1}{2} (|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle)$ 。這表明我們獲取了以下新的狀態向量

$$|\Phi_7\rangle = (\frac{1}{2} ((-1) |q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle)).$$

接著，從清單 3.1 中的第 44 行中，語句“h q[4];”在圖 3.4 的第三個時間段中實現一個 Hadamard 閘。它們從新狀態向量  $|\Phi_7\rangle$  採取

**Listing 3.1 continued...**

44. h q[4];

$(\frac{1}{2} ((-1) |q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle))$  作為他們的輸入。狀態  $(-\frac{1}{2} |q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle)$  轉換為狀態  $-\frac{1}{2\sqrt{2}} (|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle)$ 。狀態  $(\frac{1}{2} |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle)$  轉換為狀態  $\frac{1}{2\sqrt{2}} (|q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle)$ 。狀態  $(\frac{1}{2} |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle)$  轉換為狀態  $\frac{1}{2\sqrt{2}} (|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle - |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle)$ 。狀態  $(\frac{1}{2} |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle)$  轉換為狀態  $\frac{1}{2\sqrt{2}} (|q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle - |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle)$ 。也就是說，我們獲得了以下新的狀態向量

$$|\Phi_8\rangle = (\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle - |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle))。$$

接著，從清單 3.1 中第 45 行的陳述“cx q[3],q[4];”在圖 3.4 的第四個時間段中實現一個 **CNOT** 閘。他們在新的狀態向量  $|\Phi_8\rangle$  中採取

**Listing 3.1 continued...**

45. cx q[3],q[4];

$\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle - |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle)$  作為他們的輸入。狀態  $(\frac{1}{\sqrt{2}} |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle)$  轉換

為狀態 $(\frac{1}{\sqrt{2}} |q[4]^1 > |q[3]^1 >)$ 。狀態 $(-\frac{1}{\sqrt{2}} |q[4]^1 > |q[3]^0 >)$  轉換為狀態 $(-\frac{1}{\sqrt{2}} |q[4]^1 > |q[3]^0 >)$ 。這表明我們獲取了以下新的狀態向量

$$|\Phi_9> = (\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[4]^1 > |q[3]^1 > - |q[4]^1 > |q[3]^0 >))。$$

接著,從清單 3.1 中第 46 行的陳述“h q[4];”圖 3.4 的第五個時隙中實現一個哈達門。它們在新的狀態向量  $|\Phi_9>$ 中採用  $(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[4]^1 > |q[3]^1 > - |q[4]^1 > |q[3]^0 >))$  作為他們的輸入。狀態  $(\frac{1}{\sqrt{2}} |q[4]^1 > |q[3]^1 >)$ 是

**Listing 3.1 continued...**

46. h q[4];

轉換為狀態  $\frac{1}{2} (|q[4]^0 > |q[3]^1 > - |q[4]^1 > |q[3]^1 >)$ 。狀態 $(-\frac{1}{\sqrt{2}} |q[4]^1 > |q[3]^0 >)$  轉換為狀態 $-\frac{1}{2} (|q[4]^0 > |q[3]^0 > - |q[4]^1 > |q[3]^0 >)$ 。這表明我們獲取了以下新的狀態向量

$$|\Phi_{10}> = \frac{1}{2} ((-1) |q[4]^0 > |q[3]^0 > + |q[4]^0 > |q[3]^1 > + |q[4]^1 > |q[3]^0 > + (-1) |q[4]^1 > |q[3]^1 > )。$$

接著,從清單 3.1 中第四十七行到第四十八行兩個語句“x q[4];”和“x q[3];”在第六個時隙中實現兩個 **X (NOT)**閘

**Listing 3.1 continued...**

47. x q[4];

48. x q[3];

圖 3.4。 $\frac{1}{2}^0$  它們在新的狀態向量 $|\Phi_{10}>$ 中採用  $\frac{1}{2} ((-1) |q[4]^0 > |q[3]^0 > + |q[4]^0 > |q[3]^1 > + |q[4]^1 > |q[3]^0 > + (-1) |q[4]^1 > |q[3]^1 >)$ 作為他們的輸入。狀態 $(-\frac{1}{2} |q[4]^0 > |q[3]^0 >)$

轉換為狀態 $(-\frac{1}{2} |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle)$ 。狀態 $(\frac{1}{2} |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle)$  轉換為狀態 $(\frac{1}{2} |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle)$ 。狀態 $(\frac{1}{2} |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle)$  轉換為狀態 $(\frac{1}{2} |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle)$ 。狀態 $(-\frac{1}{2} |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle)$  轉換為狀態 $(-\frac{1}{2} |q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle)$ 。也就是說,我們獲得了以下新的狀態向量

$$|\Phi_{11}\rangle = \frac{1}{2} ((-1) |q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle + (-1) |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle)。$$

接著,從清單 3.1 中的第 49 行,語句“ $u3(2\pi,0\pi,0\pi) \ q[3];$ ”完成一個  $u3(2\pi,0\pi,0\pi)$  閘,該閘是 $(2 \times 2)$ 矩陣中的  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$

**Listing 3.1 continued...**

49.  $u3(2\pi,0\pi,0\pi) \ q[3];$

圖 3.4 的十七時隙。它在新的狀態向量  $|\Phi_{11}\rangle$ 中採用  $\frac{1}{2} ((-1) |q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle + (-1) |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle)$  作為其輸入。狀態 $(-\frac{1}{2} |q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle)$  收到一個相 $-(1)$ 。狀態 $(\frac{1}{2} |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle)$  收到一個相 $-(1)$ 。狀態 $(\frac{1}{2} |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle)$  收到一個相 $-(1)$ 。狀態 $(-\frac{1}{2} |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle)$  收到一個相 $-(1)$ 。這表明我們獲取了以下新的狀態向量

$$\begin{aligned} \|\Phi_{12}\rangle &= \frac{1}{2} ((-1 \times -1) |q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle + (-1) |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle + (-1) |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle + (-1 \\ &\quad \times -1) |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle) \\ &= \frac{1}{2} (|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle + (-1) |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle + (-1) |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle) \end{aligned}$$

那些量子閘從第二個時隙到圖 3.4 的第七個時隙完成相移器 $(2 |0^{\otimes 2}\rangle \langle 0^{\otimes 2}| - I_{2^2 \times 2^2})$ ,在 Grover 擴散運算符中完成可適應性問題的實例  $F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$ 。接著,從清單 3.1 中的第五十行到第五十一行,兩個語句“ $h \ q[4];$ ”

**Listing 3.1 continued...**

50. h q[4];

51. h q[3];

和“h q[3];”在圖 3.4 的第八個時間段中實施兩個 Hadamard 門。他們在擴散操作器中完成第二個  $H^{\otimes 2}$  閘  $H^{\otimes 2} (2 |0^{\otimes 2}\rangle \langle 0^{\otimes 2}| - I_{2^2 \times 2^2}) H^{\otimes 2}$ 。它採在新的狀態向量  $|\Phi_{12}\rangle$  中採用  $\frac{1}{2} (|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle + (-1) |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle + (-1) |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle)$  作為他們的輸入。狀態  $(\frac{1}{2} |q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle)$  被轉換為狀態  $(\frac{1}{4} (|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle))$ ，狀態  $(-\frac{1}{2} |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle)$  轉換為狀態  $(-\frac{1}{4} (|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle - |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle - |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle))$ ，狀態  $(-\frac{1}{2} |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle)$  被轉換為狀態  $(-\frac{1}{4} (|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle - |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle - |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle))$ ，狀態  $(\frac{1}{2} |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle)$  轉換為狀態  $(\frac{1}{4} (|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle - |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle - |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle))$  也就是說，我們獲得了以下新的狀態向量

$$|\Phi_{13}\rangle = |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle。$$

接下來，從清單 3.1 第 52 行的陳述“measure q[4] -> c[4];”是測量第五個量子位元 q[4]，並通過覆蓋第五個經典位元 c[4] 來記錄測量結果。從清單 3.1 第 53 行起，陳述“measure q[3] -> c[3];”是測量第四個量子位元 q[3]，並通過覆蓋第四個經典位元 c[3] 來記錄測量結果。它們完成從圖 3.4 的第九個時隙到第十個時隙的測量。

**Listing 3.1 continued...**

// We complete the measurement of the answer.

52. measure q[4] -&gt; c[4];

53. measure q[3] -&gt; c[3];

在後端 *ibmqx4* 中，IBM 的量子電腦中有五個量子位元 **IBM**，我們使用命令"

simulate"來執行清單 3.1 中的程式。測量結果如圖 3.5 所示。從圖 3.5 中,我們獲得答案 11000 ( $c[4] = q[4] = |1\rangle$ ,  $c[3] = q[3] = |1\rangle$ ,  $c[2] = q[2] = |0\rangle$ ,  $c[1] = q[1] = |0\rangle$  和  $c[0] = q[0] = |0\rangle$ ) 概率為 1(100%)。這就是說,與可能性 1(100%)我們得到量子位元  $q[3]$ 的值是 $|1\rangle$ 量子位元  $q[4]$ 的值是 $|1\rangle$ 。為了解決可適應性問題的實例  $F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$  , 我們使用 量子位元  $q[3]$ 來編碼布爾變數  $x_1$  , 並使用量子位元  $q[4]$ 對布爾變數  $x_2$  進行編碼。因此,答案是布爾變數  $x_1$  的值為 1(1),布爾變數  $x_2$  的值為 1(1)。

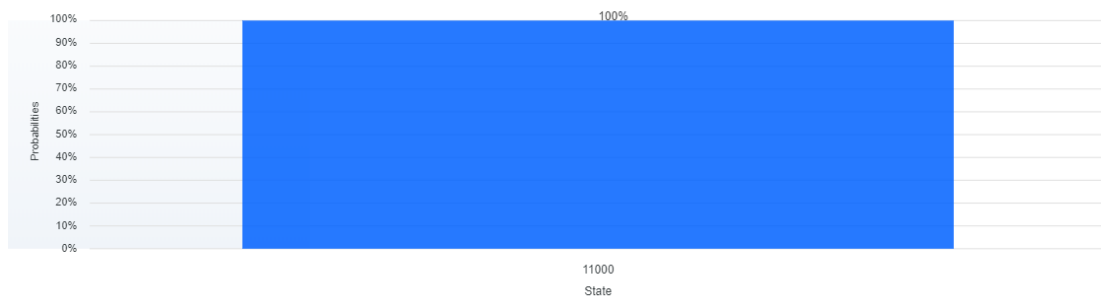


圖 3.5:在測量後,解決了  $F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$  的可適應性問題的實例,獲得概率 11000 的答案(100%)。 2

### 3.2.9 量子搜索演算法解決可適應性問題

一個可適應性問題有  $n$  布爾變數和任何給定的 oracular 函數  $O_f(x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n)$ 。任何給定的 oracular 函數  $O_f(x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n)$  是  $C_1 \wedge C_2 \dots \wedge C_m$  形式的布林公式  $C$ 。每個子句  $C_j$  for  $1 \leq j \leq m$  是表單  $x_1 \vee x_2 \vee \dots x_{n-1} \vee x_n$  為每個布林變數  $x_k$  to  $1 \leq k \leq n$  的公式。問題是找到每個布林變數的值,以便任何給定的 oracular 函數  $O_f(x_1 x_2 \dots, x_{n-1} x_n)$  (整個公式) 具有值 1。我們使用量子搜索演算法來查找  $M$  該問題的  $M$  解決方案之一,其中  $0 \leq M \leq 2$ 。

圖 3.6 中的量子電路是實現量子搜索演算法,解決  $n$  布爾變數和  $m$  子句的可適應性問題的實例。圖 3.6 左上部的第一個量子寄存器是  $(|0^{\otimes n}\rangle)$ 。這就是說每個量子位元的初始值是  $|0\rangle$ 。圖 3.6 左下部的第二個量子寄存器具有  $(m \times n + 2 \times m + 1)$  量子位元,是輔助量子寄存器。

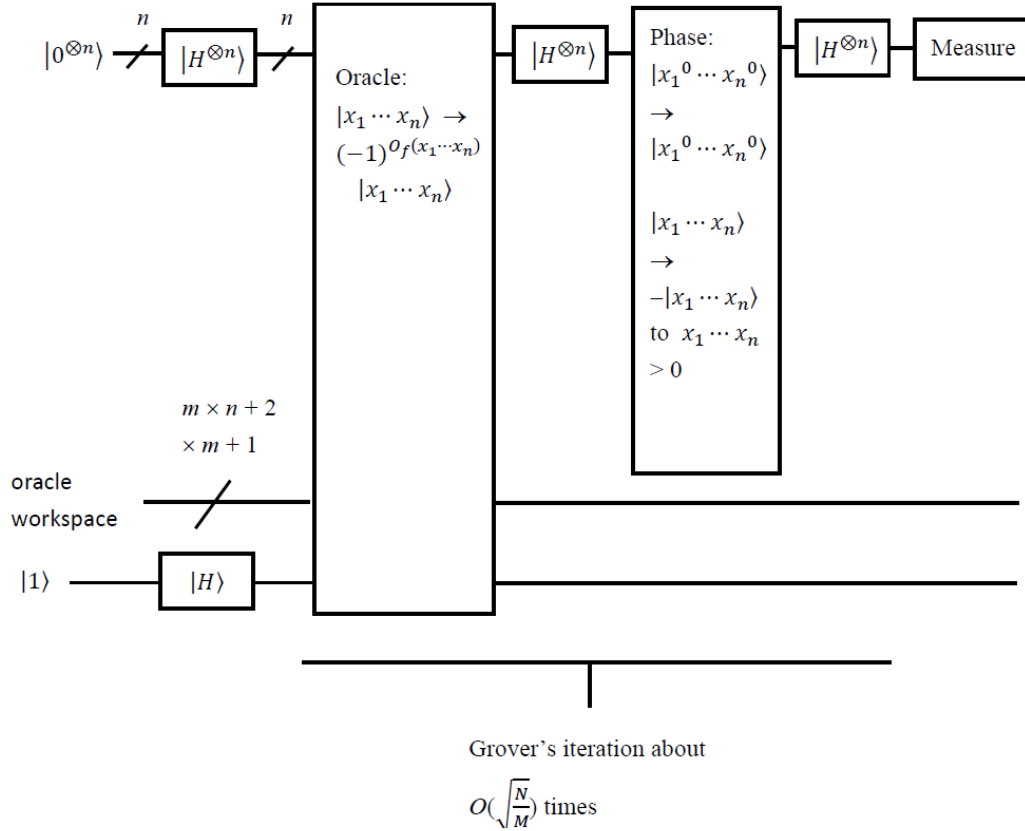


圖 3.6:實現量子搜索演算法的電路,解決  $n$  布爾變數和  $m$  子句的可適應性問題的實例。

第二個量子寄存器中每個量子位元的初始值是  $|0\rangle$  或  $|1\rangle$ 這依賴於實現邏輯或操作或邏輯和操作。圖 3.6 左下部的第三個量子寄存器是 $(|1\rangle)$

### 3.2.10 量子搜索演算法的第一階段解決可評估性問題

在圖 3.6 中, 解決  $n$  布林變數和  $m$  子句解決可適應性問題實例的量子搜索問題的第一階段是使用  $n$  Hadamard 閘 ( $H^{\otimes n}$ )操作第一量子暫存器( $|0^{\otimes n}\rangle$ )。表示它產生  $n$  個量子位元的疊加 ( $\bigotimes_{k=1}^n (\frac{|x_k^0\rangle + |x_k^1\rangle}{\sqrt{2}})$ ) =  $\frac{1}{\sqrt{2^n}} (\sum_{\{x_1 x_2 \dots x_n | \forall x_d \in \{0,1\} \text{ for } 1 \leq d \leq n\}} |x_1 x_2 \dots x_n\rangle)$ 。 $n$  布林變數與  $m$  子句的可適應性問題的解決方案空間為  $\{x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n | \forall x_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq n\}$ 。在量子搜索演算法的第一階段,具有振幅 ( $\frac{1}{\sqrt{2^n}}$ ) 的狀態( $|x_1^0 x_2^0 \dots x_n^0\rangle$ )在解空間中編碼第一個元素  $x_1^0 x_2^0 \dots x_n^0$ ,以及具有振幅 ( $\frac{1}{\sqrt{2^n}}$ )的狀態 ( $|x_1^1 x_2^1 \dots x_n^1\rangle$ ) 編碼解決方案

空間中的最後一個元素  $x_1^1 x_2^1 \dots x_n^1$  在量子搜索演算法的第一階段,它使用一個哈達馬德門來操作第三個量子寄存器( $|1\rangle$ )。也就是說,它生成第三個量子寄存器( $|1\rangle$ )的疊加( $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ )

### 3.2.11 量子搜索演算法第二階段解決可評估性問題

在圖 3.6 中,解決  $n$  布林變數和  $m$  子句的可適應性問題實例的量子搜索演算法的第二階段是完成 Oracle。Oracle 可辨識  $n$  布林變數與  $m$  子句的可適應性問題的解決方案。Oracle 將  $y$  答案的概率振幅乘以  $-1$ ,並且保持不變任何其他振幅。任何指定的 oracular 函數  $O_f(x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n)$  是  $C_1 \wedge C_2 \dots \wedge C_m$  形式的布林公式  $C$ 。每個子句  $C_j$  為  $1 \leq j \leq m$  是表單  $C_1 \wedge C_2 \dots \wedge C_m$  為每個布林變數  $x_k$  to  $1 \leq k \leq n$  的公式。因此,要實現任何給定的 oracular 函數  $O_f(x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n)$  我們需要完成  $(m \times n)$  邏輯或操作和  $(m)$  邏輯和操作。

在量子搜索演算法第二階段的 oracle 工作區中,我們使用輔助量子位元  $|r_{j,k}\rangle$  for  $1 \leq j \leq m$  and  $0 \leq k \leq n$ , 編碼輔助布林變數  $r_{j,k}$  for  $1 \leq j \leq m$  and  $0 \leq k \leq n$ 。我們使用輔助量子位元  $|s_j\rangle$  for  $0 \leq j \leq m$  編碼輔助布林變數  $s_j$  for  $0 \leq j \leq m$ 。由於我們使用輔助量子位元  $|r_{j,0}\rangle$  for  $1 \leq j \leq m$  作為每個子句中第一個邏輯或操作(“ $\vee$ ”)的第一個操作數,每個輔助量子位元的初始值  $|r_{j,0}\rangle$  for  $1 \leq j \leq m$  設置為  $|0\rangle$ 。這意味著此設定不會更改每個子句中第一個邏輯或操作的正確結果。我們使用 **CCNOT** 閘和四個 **NOT** 閘在每個子句中實現每個邏輯或操作。我們應用輔助量子位元  $|r_{j,k}\rangle$  for  $1 \leq j \leq m$  and  $1 \leq k \leq n$ , 用於儲存在每個子句中實現邏輯或操作的結果。這就是說,每個輔助量子位元  $|r_{j,k}\rangle$  for  $1 \leq j \leq m$  and  $1 \leq k \leq n$  實際上是實現邏輯或操作的 **CCNOT** 閘的目標位元。因此,每個輔助量子位元的初始值  $|r_{j,k}\rangle$  for  $1 \leq j \leq m$  and  $1 \leq k \leq n$  設置為  $|1\rangle$ 。

我們使用輔助量子位元  $|s_0\rangle$  作為任何給定的 oracular 函數  $O_f(x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n)$  中第一個邏輯和操作(“ $\wedge$ ”)的第一個操作數,其形態  $C_1 \wedge C_2 \dots \wedge C_m$  的布林公式。輔助量子位元的初始值  $|s_0\rangle$  設置為  $|1\rangle$ 。也就是說,此設定不會改變任何給定的 oracular 函數  $O_f(x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n)$  中第一個邏輯和操作的正確結果,該公式為  $C_1 \wedge C_2 \dots \wedge C_m$ 。我們使用 **CCNOT** 閘  $C$  在任何給定的 oracular 函數  $O_f(x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n)$  中實現每個邏輯和操作,使用  $C_1 \wedge C_2 \dots \wedge C_m$  形式的布林公式實現每個邏輯和操作。我們應用輔助量子位元  $|s_j\rangle$  for  $1 \leq j \leq m$  儲存在任何給定的 oracular 函數  $O_f(x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n)$  中實現邏輯和操作的結果,以及  $C_1 \wedge C_2 \dots \wedge C_m$  的布林公式。這表示每個輔助量子位元  $C_1 \wedge C_2 \dots \wedge C_m$  實際上是實現邏輯和操作的 **CCNOT** 閘的目標位元。因此,每個輔助量子位元的初始值  $|s_j\rangle$  for  $1 \leq j \leq m$  設置為  $|0\rangle$ 。

**CCNOT** 閘和四個 **NOT** 閘可以實現邏輯或操作。**CCNOT** 閘可以實現邏輯和操作。從圖 3.1 開始,實現任何給定的 oracular 函數  $O_f(x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n)$  是完成  $(m \times n)$  邏輯或操作和  $(m)$  邏輯和操作。也就是說,實現任何給定的 oracular 功能  $O_f(x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n)$  是完成  $(m \times n + m)$  **CCNOT** 閘和  $(4 \times m \times n)$  **NOT** 閘。量子位元  $|s_m\rangle$  是儲存所有給定的 oracular 函數  $O_f(x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n)$  的結果。如果量子位元的值  $|s_m\rangle$  等於  $|1\rangle$ ,則任何給定的 oracular 函數  $O_f(x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n)$  的值為 1 (1)。否則,它具有值 0 (零)。

我們使用一個 **CNOT** 閘  $\left| \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \oplus s_m \right\rangle$  乘 y 答案的概率振幅-1 和自保持任何其他振幅不變,其中量子位元  $\left( \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$  是 **CNOT** 閘和量子位元  $|s_m\rangle$  是 **CNOT** 閘。W 控制位的值  $|s_m\rangle$  等於  $|1\rangle$ ,目標位元變為  $\left( \frac{|1\rangle - |0\rangle}{\sqrt{2}} \right) = (-1) \left( \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$ 。這是將答案的概率振幅乘以-1。當控制位的值  $|s_m\rangle$  等於  $|0\rangle$ ,目標位元仍為  $\left( \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$ 。這是為了保持任何其他振幅不變。

由於量子運算本質上是可逆的,因此執行實現任何給定的 oracular 函數  $O_f(x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n)$  的反向順序可以將輔助曲原子位還原到其初始狀態。這就是說,量子搜索演算法的第二階段,以解決的可適應性問題與  $n$  布爾變數和  $m$  子句  $\frac{1}{\sqrt{2^n}} \left( \sum_{\{x_1 x_2 \dots x_n | \forall x_d \in \{0,1\} \text{ for } 1 \leq d \leq n\}} |x_1 x_2 \dots x_n\rangle \right)$  轉換為  $(-1)^{O_f(x_1 \dots x_n)} \frac{1}{\sqrt{2^n}} \left( \sum_{\{x_1 x_2 \dots x_n | \forall x_d \in \{0,1\} \text{ for } 1 \leq d \leq n\}} |x_1 x_2 \dots x_n\rangle \right)$ 。圖 3.6 中完成 Oracle 量子搜索演算法第二階段的成本是實現  $(2 \times (m \times n + m))$  **CCNOT** 閘、 $(8 \times m \times n)$  **NOT** 閘和一個 **CNOT** 閘。

### 3.2.12 量子搜索演算法第三階段解決可評估性問題

在圖 3.6 中,量子搜索演算法的第三階段是完成 Grover 擴散運算符,以解決  $n$  布爾變數和  $m$  子句的可適應性問題實例。實現 Grover 擴散運算符等效於實現  $H^{\otimes n} (2 |0^{\otimes n}\rangle \langle 0^{\otimes n}| - I_{2^n \times 2^n}) H^{\otimes n}$ 。相移器運算子  $(2 |0^{\otimes n}\rangle \langle 0^{\otimes n}| - I_{2^n \times 2^n})$  反轉所有狀態,除了  $(|x_1^0 \dots x_n^0\rangle)$ 。在圖 3.6 中,量子搜索問題的第三階段是使用相移運算符  $2 |0^{\otimes n}\rangle \langle 0^{\otimes n}| - I_{2^n \times 2^n}$ ,反轉除  $|x_1^0 \dots x_n^0\rangle$  夾在  $H^{\otimes n}$  閘之間的所有狀態。這表明,量子搜索演算法第三階段解決  $n$  布爾變數和  $m$  子句的可適

應性問題實例是增加答案的振幅,減小非答案的振幅。

為了解決  $n$  布爾變數和  $m$  子句的可適應性問題實例,我們將圖 3.6 中量子搜索演算法的第二階段到第三階段的 Oracle 和 Grover 擴散運算符視為子例程。

我們將子例程為 *Grover iteration*。重複執行  $O(\sqrt{\frac{N}{M}})$  次的 Grover 反覆運算後,

測量答案的成功概率至少為  $(1/2)$ 。當  $(M / N)$  的值等於  $(1 / 4)$  時,測量答案的成功概率為  $1$  (100%)與一次性的 Grover iteration。這是量子搜索演算法解決  $n$  布爾變數和  $m$  子句的可適應性問題實例的最佳案例。當  $M$  的值等於  $1$  時,使用  $O(\sqrt{N})$  次的 Grover 反覆運算測量答案(s) 的成功概率至少為  $(1 / 2)$ 。這是量子搜索演算法中解決  $n$  布爾變數和  $m$  子句的可適應性問題的實例的最差情況。這表明,用  $n$  布爾變數和  $m$  子句解決可適應性問題的實例的量子搜索演算法僅提供二次加速。

### 3.3 最大集團問題介紹

我們假設圖形  $G = (V, E)$  具有  $n$  個頂點和  $\theta$  個邊,其中  $V$  是  $G$  中的一組頂點,  $E$  是  $G$  中的一組邊。對於具有  $n$  個頂點和  $\theta$  個邊的圖形  $G = (V, E)$ , 其互補圖是包含原始圖形  $G = (V, E)$  中缺少的所有邊點,其中有  $n$  個頂點和  $\theta$  個邊。因此,我們假設其互補圖  $\bar{G} = (V, \bar{E})$  具有  $n$  個頂點和  $m$  邊,其中每個邊都  $\bar{E}$  出於  $E$ ,其中  $V$  是  $\bar{G}$  中的一組頂點,是  $\bar{G}$  中的一組邊。也就是說,圖形  $G = (V, E)$  及其互補圖  $\bar{G} = (V, \bar{E})$  具有相同的頂點, 其互補圖  $\bar{G} = (V, \bar{E})$  包含原始圖形  $G = (V, E)$  中缺失的所有邊。在圖 3.7a 中,圖形有三個頂點  $\{v_1, v_2, v_3\}$  和兩個邊緣  $\{(v_1, v_2), (v_1, v_3)\}$ 。在圖 3.7b 中,其互補圖具有相同的三個頂點  $\{v_1, v_2, v_3\}$  和圖 3.7a 中原始圖形中缺少的一個邊  $\{(v_2, v_3)\}$  缺失。

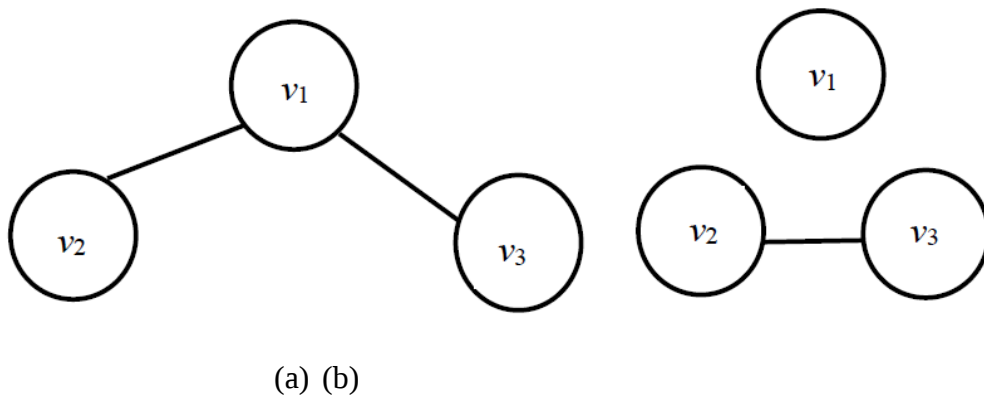


圖 3.7:(a) 圖形有三個頂點和兩個邊。(b) 其互補的圖形的有相同的頂點與原始圖

形中缺少的一個邊

在數學上,具有  $n$  頂點和  $\theta$  邊的圖形  $G = (V, E)$  的組定義為一組頂點,其中每個頂點通過邊連接到所有其他頂點。也就是說,在數學上,圖 for a graph 形  $G = (V, E)$  的一個團,具有  $n$  個頂點和  $\theta$  邊緣是  $G$  的完整子圖。對於圖 3.7a 中具有三個頂點的圖形  $\{v_1, v_2, v_3\}$  和兩個邊  $\{(v_1, v_2), (v_1, v_3)\}$  有八個頂點子集。八個頂點子集是隨後的  $\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}$  和一個空的頂點子集  $\{\}$ 。

在互補圖中連接的兩個頂點與三個頂點  $\{v_1, v_2, v_3\}$  和圖 3.7b 中的一個邊緣  $\{(v_2, v_3)\}$  在原始圖形中斷開,三個頂點  $\{v_1, v_2, v_3\}$  和兩個邊緣  $\{(v_1, v_2), (v_1, v_3)\}$  在圖 3.7a 中斷開。也就是說,在互補圖中連接的任何兩個頂點都不能是同一個群的成員。因為圖 3.7b 中的互補圖中的邊緣  $(v_2, v_3)$  連接兩個頂點  $v_2$  和  $v_3$ , 因此包含兩個頂點  $v_2$  和  $v_3$  的八個頂點子集不是一個群。頂點子集  $\{v_1, v_2, v_3\}$  包含兩個頂點  $v_2$  和  $v_3$ , 因此它不是一個群。頂點的另一個子集  $\{v_2, v_3\}$  由兩個頂點  $v_2$  和  $v_3$  組成, 因此它不是一個組。這表示頂點的其他六個子集  $\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}$  和空頂點子集  $\{\}$  都是一個單元格。

到頂點數  $\{v_1, v_2\}$  和  $\{v_1, v_3\}$  是兩個。到頂點數  $\{v_1\}, \{v_2\}$  和  $\{v_3\}$  都是一個。作為頂點的空子集  $\{\}$  的到頂點數為零。最大群組問題,這是 NP-complete 問題是在圖 3.7a 中尋找具有三個頂點  $\{v_1, v_2, v_3\}$  和兩個邊  $\{(v_1, v_2), (v_1, v_3)\}$  的最大群。因此,在圖 3.7a 中,群  $\{v_1, v_2\}$  和群  $\{v_1, v_3\}$  是兩個最大大小的小圈子,用於解決圖形的最大群數問題,三個頂點  $\{v_1, v_2, v_3\}$  和兩個邊緣  $\{(v_1, v_2), (v_1, v_3)\}$ 。由於實現此示例的量子程式使用更多的量子位元,在後端 *ibmqx4* 中使用超過 5 個量子位元,IBM 的量子電腦中有五個量子位元,因此我們僅使用此示例來解釋最大團問題是什麼。接下來,我們給出**定義 3-3** 來描述最大群問題。

**定義 3-3:** 從數學上講,具有  $n$  頂點和  $\theta$  邊緣的圖形  $G = (V, E)$  的組定義為一組頂點,其中每個頂點通過邊連接到所有其他頂點。具有  $n$  頂點和  $\theta$  邊的  $G = (V, E)$  最大群問題是在具有  $n$  頂點和  $\theta$  邊的圖形  $G = (V, E)$  中尋找最大群。

根據**定義 3-3**,所有可能的解決方案,圖形  $G$  具  $n$  頂點和  $\theta$  邊緣組成的組問題有  $2^n$  可能的選擇。每個可能的選擇都對應於頂點的子集( $G$  中的可能群)。因此,我們假設一個集  $X \in$  包含  $2^n$  個可能的選項,並且集  $X$  等於  $\{x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n \mid \forall x_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq n\}$ 。也就是說  $\{x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n \mid \forall x_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq n\}$  裡的每個元素長度是  $n$  位元,且每個元素佔  $2^n$  個可能選擇中的一個。

為了介紹,我們認為  $x_d^0$  表示  $x_d$  的值為零的事實,  $x_d^1$  表示  $x_d$  的值為 1 的事實

如果 $\{x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n \mid \forall x_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq n\}$ 裡的一個元素  $x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n$  是一群，且  $x_d$  for  $1 \leq d \leq n$  的值是 1，那  $x_d^1$  代表第  $d$ th 個頂點在群組裡，如果 $\{x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n \mid \forall x_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq n\}$ 裡的一個元素  $x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n$  是一群，且  $x_d$  for  $1 \leq d \leq n$  的值是 0，那  $x_d^0$  代表第  $d$ th 個頂點不在群組裡

從  $\{x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n \mid \forall x_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq n\}$ ，第一個元素  $x_1^0 x_2^0 \dots x_{n-1}^0 x_n^0$  編碼一組空的頂點，即  $\{\}$ 。第二個元素  $x_1^0 x_2^0 \dots x_{n-1}^0 x_n^1$  編碼一組頂點  $\{v_n\}$ 。第三個元素  $x_1^0 x_2^0 \dots x_{n-1}^1 x_n^0$  編碼一組頂點  $\{v_{n-1}\}$ ，直到最後一個元素  $x_1^1 x_2^1 \dots x_{n-1}^1 x_n^1$  編碼一組頂點  $\{v_1 v_2 \dots v_{n-1} v_n\}$ 。我們認為 $\{x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n \mid \forall x_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq n\}$  就像一個包含具有  $n$  頂點和  $\theta$  邊的圖形  $G$  最大群問題的  $2^n$  個可能性選擇的未排序資料庫

### 3.3.1 識別群到最大群問題的流程圖

從定義 3-3 中，使用  $n$  頂點和  $\theta$  邊解決圖形  $G = (V, E)$  的群問題，其互補圖  $\bar{G} = (V, \bar{E})$ ，每個邊都出自  $E$  的  $n$  頂點和  $m$  邊，是查找大小  $r$  的頂點的子集  $V^r$  該子集滿足  $V^r$  在  $G$  中為最大群。這表示所有可能的解決方案都是頂點的  $2^n$  子集，其中每個頂點子集對應於可能的群。在互補圖  $\bar{G} = (V, \bar{E})$  中連接的兩個頂點  $n$  個頂點和  $m$  個邊，在原始圖形中斷開， $G = (V, E)$  與  $n$  個頂點和  $\theta$  邊連接。也就是說，在互補圖中連接的任何兩個頂點都不能是同一個群的成員。

如果  $2^n$  個可能選項(群組)中的任何一個不包含互補圖  $\bar{G}$  中的任何邊，則它是原始圖形  $G$  中的一個群。否則，它不是原始圖形  $G$  中的一個團。布林變數  $x_i$  與  $x_j$  編碼頂點  $v_i$  and  $v_j$  for  $1 \leq i \leq n$  and  $1 \leq j \leq n$ 。在互補圖中  $\bar{G}$ ，第  $k$  個邊為  $e_k = (v_i, v_j)$  to  $1 \leq k \leq m$ 。確定頂點  $2^n$  個子集中的任何一個是否包括第  $k$  個邊為  $e_k = (v_i, v_j)$  to  $1 \leq k \leq m$  的請求條件是滿足作為真實值的組成  $(\overline{x_i \wedge x_j})$  的公式，其中  $(\overline{x_i \wedge x_j})$  是一個 **NAND** 閘。我們認為表格的公式是一個組成  $(\overline{x_i \wedge x_j})$ 。當布林變數  $x_i$  的值為 1 (1) 且布林變數  $x_j$  的值為 1 (1) 時，實現  $(\overline{x_i \wedge x_j})$  的輸出(結果)為 0 (零)。這表明包含兩個頂點  $v_i$  和  $v_j$  的每個可能選項不是一個群。當布林變數  $x_i$  的值為 1 (1) 且布林變數  $x_j$  的值為 0 (零) 時，實現  $(\overline{x_i \wedge x_j})$  的輸出(結果)為 1 (one)。也就是說，每個可能的選擇由頂點  $v_i$  組成，並且不包含頂點  $v_j$ ，可能是一個團。當布林變數  $x_i$  的值為 0 (零) 且布林變數  $x_j$  的值為 1 (1) 時，實現  $(\overline{x_i \wedge x_j})$  的輸出(結果)為 1 (one)。這意味著每個可能的選擇包括頂點  $v_j$ ，並且不包含頂點  $v_i$  可能是一個團。當布林變數  $x_i$  的值為 0 (零) 且布林變數  $x_j$  的值為 0 (零) 時，實現  $(\overline{x_i \wedge x_j})$  的輸出(結果)為 1 (one)。這表明不包含頂點  $v_i$  和頂點  $v_j$  的每個可能選項可能是一個團。

檢查頂點  $2^n$  個子集中是否有一個不包刮補圖的  $m$  邊，或是不滿足公式的組成  $(\bigwedge_{k=1}^m (\overline{x_i \wedge x_j}))$  是實值。我們將公式的組成  $(\bigwedge_{k=1}^m (\overline{x_i \wedge x_j}))$  視為窗體  $C_1 \wedge C_2 \dots \wedge C_m$  的布林公式，其中每個子句  $C_j$  為  $1 \leq j \leq m$  是表單的公式  $(\overline{x_i \wedge x_j})$  到布林變數  $x_i$  and  $x_j$  for  $1 \leq i \leq n$  and  $1 \leq j \leq n$ 。在  $2^n$  子集的任何一個可以尋找每個布林變數的值來滿足整個公式的值 1 (一)。這與每個布爾變數的尋找值相同，這些值使每個子句具有值 1 (一)。

認知到群是等於實現  $(\bigwedge_{k=1}^m (\overline{x_i \wedge x_j}))$  組成的公式。因此，我們需要利用輔助布爾變數  $r_k$  for  $1 \leq k \leq m$  和輔助布林變數  $s_k$  for  $0 \leq k \leq m$ 。我們使用 **CCNOT** 閘在每個子句中實現唯一的 **NAND** 閘  $(\overline{x_i \wedge x_j})$ ，我們應用輔助布爾變數  $r_k$  for  $1 \leq k \leq m$  來存儲在每個子句中實現唯一 **NAND** 閘  $(\overline{x_i \wedge x_j})$  的結果。也就是說，每個輔助布爾變數  $r_k$  for  $1 \leq k \leq m$  實際上是實現 **NAND** 閘  $(\overline{x_i \wedge x_j})$  的 **CCNOT** 閘的目標位元。因此，每個輔助布林變數  $r_k$  for  $1 \leq k \leq m$  的初始值設置為一 (1)。

我們使用輔助布林變數  $s_0$  作為第一個操作數的第一個邏輯和組成  $(\bigwedge_{k=1}^m (\overline{x_i \wedge x_j}))$  的布林公式的操作 (“ $\wedge$ ”)。輔助布林變數  $s_0$  的初始值設定為一 (1)。也就是說，此設置不會更改在  $(\bigwedge_{k=1}^m (\overline{x_i \wedge x_j}))$  中第一個邏輯和操作的正確結果。我們應在 **CCNOT** 閘在  $\bigwedge_{k=1}^m (\overline{x_i \wedge x_j})$  a 中實現邏輯和操作，我們使用輔助布林變數  $s_k$  for  $1 \leq k \leq m$  來存儲在  $(\bigwedge_{k=1}^m (\overline{x_i \wedge x_j}))$  中實現邏輯和操作的結果。這表明每個輔助布林變數  $s_k$  for  $1 \leq k \leq m$  實際上是實現邏輯和操作的 **CCNOT** 閘的目標位元。因此，每個輔助布林變數  $s_k$  for  $1 \leq k \leq m$  的初始值設置為零 (0)。

圖 3.8 是用於識別圖形  $G = (V, E)$  的最大群數的流程圖，其  $n$  個頂點和  $\theta$  邊及其互補圖  $\bar{G} = (V, \bar{E})$  具有  $n$  個頂點和  $m$  邊。在圖 3.8 中，在語句  $S_1$  中，它將第一個迴圈的索引變數  $k$  集為一 (1)。接下來，在語句  $S_2$  中，它執行第一個循環的條件判斷。如果  $k$  的值小於或等於  $m$  的值，則下一個執行指令是語句  $S_3$ 。否則，在語句  $S_6$  中，它執行結束指令以終止查找每個布爾變數的值的任務，以便整個公式具有值 1，這與查找每個布爾變數的值相同，使每個子句具有值 1。

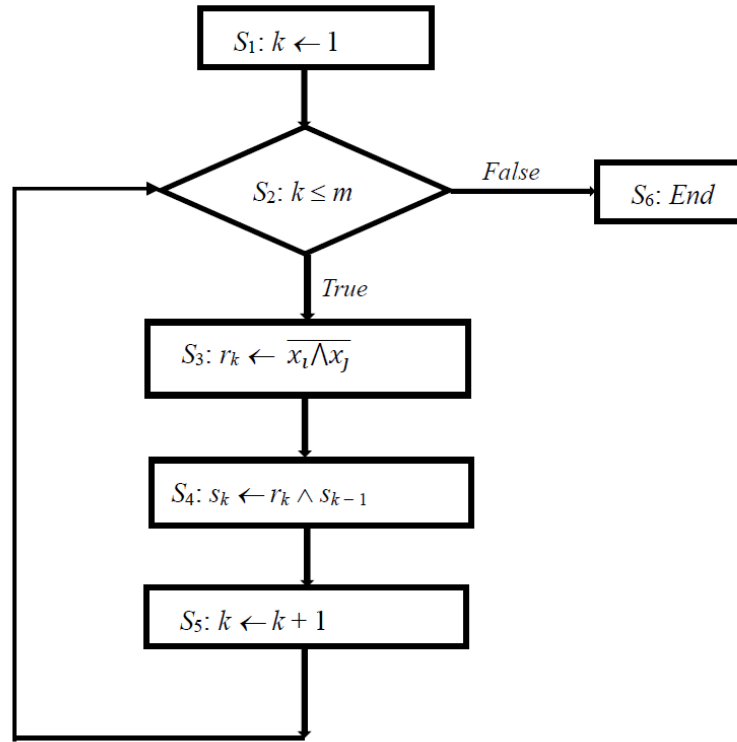


圖 3.8: 識別圖形  $G = (V, E)$  的最大群數的流程圖, 其  $n$  個頂點和  $\theta$  邊及其互補圖  $\bar{G} = (V, \bar{E})$  與  $n$  頂點和  $m$  邊。

N 語句  $S_3$ , 它實現 **NAND** 閘 “ $r_k \leftarrow \overline{x_i \wedge x_j}$ ”。布爾變數  $x_i$  和  $x_j$  分別編碼頂點  $v_i$  和頂點  $v_j$ , 這些頂點  $v_j$  由互補圖  $\bar{G} = (V, \bar{E})$  中的第  $k$  個邊連接, 具有  $n$  個頂點和  $m$  邊。布爾變數  $r_k$  儲存實現  $(\overline{x_i \wedge x_j})$  的結果 (第  $k$  個 **NAND** 閘)。接著, 語句  $S_4$ , 他執行一個邏輯和操作 “ $s_k \leftarrow r_k \wedge s_{k-1}$ ”, 其是  $(\bigwedge_{k=1}^m (\overline{x_i \wedge x_j}))$  的第  $k$  個邊。布爾變數  $r_k$  儲存實現第  $k$  個 **NAND** 閘的結果, 是邏輯和操作的第一個操作。布爾變數  $s_{k-1}$  是邏輯和操作的第二個操作數, 並儲存上一個邏輯和操作的結果。接下來, 語句  $S_5$ , 它將索引變數  $k$  的值增加到第一個迴圈。重複執行語句  $S_2$  通過語句  $S_5$ , 直到語句  $S_2$  中的條件判斷變為 *false* 值。從圖 3.8 開始, **NAND** 閘的總數為  $m$  個 **NAND** 閘。邏輯和操作的總數為  $m$  個 **AND** 閘 (邏輯和操作)。因此, 認知群的代價是實施  $m$  個 **NAND** 閘和  $m$  個 **AND** 閘。

### 3.3.2 計算最大群中問題中每個群中頂點數的流程圖

對於具有  $n$  頂點和  $\theta$  邊的圖形  $G = (V, E)$  及其互補圖  $\bar{G} = (V, \bar{E})$ , 具有  $n$  個頂點和  $m$  邊, 最大小數問題的解決方案空間是  $2^n$  個頂點子集。我們使用  $\{x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n \mid \forall x_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq n\}$  來編碼  $2^n$  個頂點子集。在  $\{x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n \mid \forall x_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq n\}$  中編碼一個頂點子集後, 完成圖 3.8 中的每個操作後, 布

爾變數  $s_m$  儲存了確定它是否是一個小團體的結果。如果布爾變數  $s_m$  的值等於 1 (1), 則它是一個團。否則, 它不是一個集團。

對於計算頂點的數量, 我們需要輔助布林變數  $z_{i+1,j}$  and  $z_{i+1,j+1}$  for  $0 \leq i \leq n-1$  and  $0 \leq j \leq i$ 。輔助布爾變數  $z_{i+1,j}$  and  $z_{i+1,j+1}$  for  $0 \leq i \leq n-1$  and  $0 \leq j \leq i$  設置為初始值 0 (零)。布爾變數  $z_{i+1,j+1}$  for  $0 \leq i \leq n-1$  and  $0 \leq j \leq i$ , 在找出布爾變數  $x_{i+1}$  的影響後, 將頂點數存儲在一個陣列中, 該變數將第  $(i+1)$  個頂點編碼為 1 (頂點)。如果布爾變數  $z_{i+1,j+1}$  for  $0 \leq i \leq n-1$  and  $0 \leq j \leq i$  等於 1 (1), 則表示團中有  $(j+1)$  1 (頂點)。布爾變數  $z_{i+1,j}$  for  $0 \leq i \leq n-1$  and  $0 \leq j \leq i$  是找出布爾變數  $x_{i+1}$  的影響後, 將頂點數存儲在一個陣列中, 該變數將  $(i+1)$  頂點編碼為 1 (頂點)。如果布爾變數  $z_{i+1,j}$  for  $0 \leq i \leq n-1$  and  $0 \leq j \leq i$  等於 1 (1), 則這就是說在陣列中有  $j$  個 (頂點)。

在一群中, 布爾變數  $x_1$  編碼 the 第一個頂點  $v_1$ 。如果布爾變數  $x_1$  的值等於 1 (1), 則第一個頂點  $v_1$  位於群中, 並且它會增加到群的頂點數。如果布爾變數  $x_1$  的值等於 0 (零), 則第一個頂點  $v_1$  不在群中, 並且它將頂點數保留為小團。因此, 布爾變數  $x_1$  增加頂點數到群數的影響是 the formula 滿足公式  $(s_m \wedge x_1)$ , 這是真正的值。同樣, 布爾變數  $x_1$  將頂點數保留到群數的影響是滿足公式  $(s_m \wedge \overline{x_1})$  即 true 值。

在一個團中, 布爾變數  $x_{i+1}$  編碼  $(i+1)$  頂點  $v_{i+1}$  表示  $1 \leq i \leq n-1$ 。如果布爾變數  $x_{i+1}$  的值等於 1 (1), 則  $(i+1)$  第一個頂點  $v_{i+1}$  位於團內, 並且它會增加到群的頂點數。如果布爾變數  $x_{i+1}$  的值等於 0 (零), 則  $(i+1)$  第一個頂點  $v_{i+1}$  不在群中, 並且它保留到陣列的頂點數。因此, 布爾變數  $x_{i+1}$  將頂點數增加到當前具有  $j$  頂點的陣列的影響是滿足公式  $(x_{i+1} \wedge z_{i,j})$  這是 true 值。同樣, 布爾變數  $x_{i+1}$  將頂點數保留到當前具有  $j$  頂點的陣列的影響是滿足公式  $(\overline{x_{i+1}} \wedge z_{i,j})$  即 true 值。

圖 3.9 是計算每個小團中頂點數到圖形  $G = (V, E)$  的最大群問題的邏輯流程圖, 其中  $n$  個頂點  $\theta$  和邊及其互補圖  $\bar{G} = (V, \bar{E})$  與  $n$  個頂點和  $m$  邊。在圖 3.9 中, 在語句  $S_1$  中, 它實現了一個邏輯和操作 “ $z_{1,1} \leftarrow s_m \wedge x_1$ ”, 即一個 **AND** 門。布林變數  $z_{1,1}$  儲存到一個 **AND** 閘  $(s_m \wedge x_1)$  的結果。如果布爾變數  $z_1$  的值等於 1 (1), 則會增加頂點數, 以便具有第一個頂點  $v_1$  的每個陣列中的頂點數為 1。接下來, 在語句  $S_2$  中, 它實現一個邏輯和操作 “ $z_{1,0} \leftarrow s_m \wedge \overline{x_1}$ ” 即一個 **AND** 閘  $(s_m \wedge \overline{x_1})$ 。布林變數  $z_{1,0}$  儲存實現一個 **AND** 門  $(s_m \wedge \overline{x_1})$  的結果。如果布爾變數  $z_{1,0}$  等於 1 (1), 則它保留頂點數, 以便每個陣列中沒有第一個頂點  $v_1$  的頂點數為零。

接下來, 在語句  $S_3$  中, 它將第一個迴圈的索引變數  $i$  集為 1。接下來, 在

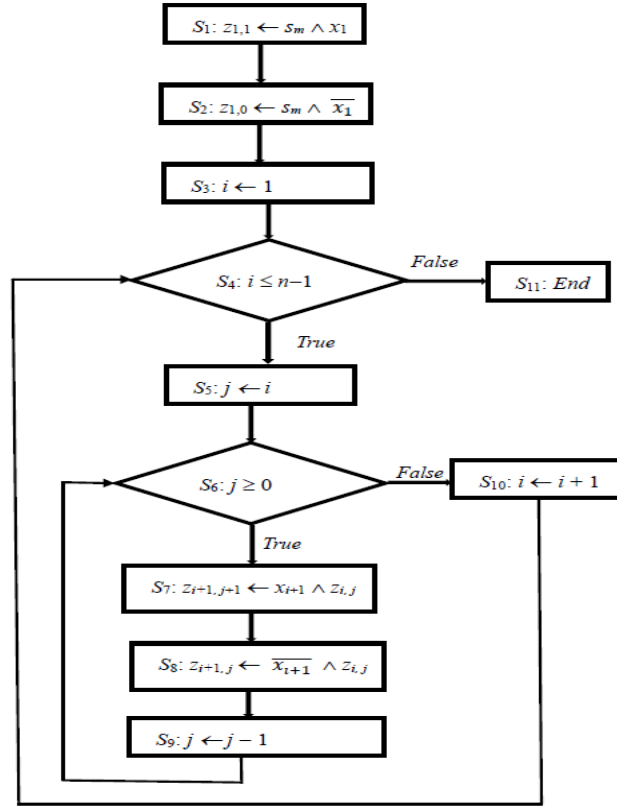


圖 3.9:計算圖  $G = (V, E)$  的  $n$  個頂點 和  $\theta$ 個邊的圖  $G = (V, E)$  的每個小團中頂點的流圖數,其互補圖  $\bar{G} = (V, \bar{E})$ 與  $n$  個頂點和  $m$  邊。

語句  $S_4$ ,它執行第一循環的條件判斷。如果  $i$  的值小於或等於  $(n-1)$  的值,則下一個執行指令是語句  $S_5$ 。否則,在語句  $S_{11}$  中,它將執行結束指令以終止要計算每個組中的頂點數的任務。N 語句  $S_5$ ,會將第二個循環的索引變數  $j$  設定為第一個迴圈中的索引變數  $i$  的值。接下來,在陳述  $S_6$  中,它執行第二循環的條件判斷。如果  $j$  的值大於或等於零,則下一個執行的指令是語句  $S_7$ 。否則,下一個執行的指令是語句  $S_{10}$ 。

在語句  $S_7$  中,它實現了邏輯和操作“ $z_{i+1,j+1} \leftarrow x_{i+1} \wedge z_{i,j}$ ”即一個 **AND** 閘。布爾變數  $x_{i+1}$  編碼 第  $(i+1)$  個頂點,是邏輯和操作的第一個操作數。布爾變數  $z_{i,j}$  是邏輯和操作的第二個操作。布爾變數  $z_{i,j}$  在找出布林變數  $x_i$  的影響後,將頂點數儲存在一個陣列中,該變數將第  $i$  個頂點編碼為一個 (頂點)數。如果布爾變數  $z_{i,j}$  的值等於 1(1),則表示團中有  $j$  個(頂點)。布爾變數  $z_{i+1,j+1}$  存儲實現邏輯和操作的結果 “ $z_{i+1,j+1} \leftarrow x_{i+1} \wedge z_{i,j}$ ”這就是說,布爾變數  $z_{i+1,j+1}$  在找出布爾變數  $x_{i+1}$  的影響后,將頂點數存儲在一個單元中,該變數將第  $(i+1)$  個頂點編碼為 1(頂點)。如果布爾變數  $z_{i+1,j+1}$  的值等於 1(1),則這意味著團中有  $(j+1)$  個 1 (頂點)。

接下來,在語句  $S_8$  中,它實現一個邏輯和操作“ $z_{i+1,j} \leftarrow \overline{x_{i+1}} \wedge z_{i,j}$ ”,即一個 **AND**

間。布爾變數  $x_{i+1}$  編碼第  $(i + 1)$  頂點,其反值  $\overline{x_{i+1}}$  是邏輯和操作的第一個操作。布爾變數  $z_{i,j}$  是邏輯和操作的第二個操作。布爾變數  $z_{i,j}$  在找出布林變數  $x_i$  的影響後,將頂點數儲存在一個陣列中,該變數將第  $i$  個頂點編碼為一個 (頂點)數。如果布爾變數  $z_{i,j}$  的值等於 1 (1),則這就是說在陣列中有  $j$  個 (頂點)。布爾變數  $z_{i,j}$  儲存實現邏輯和操作的結果 “ $z_{i+1,j} \leftarrow \overline{x_{i+1}} \wedge z_{i,j}$ ” 這表示布林變數  $z_{i+1,j}$  在找出布林變數  $x_{i+1}$  的影響後,將頂點數位儲存在一個陣列中,該變數將第  $(i + 1)$  個頂點編碼為 1 (頂點)數。如果布爾變數  $z_{i+1,j}$  的值,等於 1 (1),則這就是說在陣列中有  $j$  個 (頂點)。

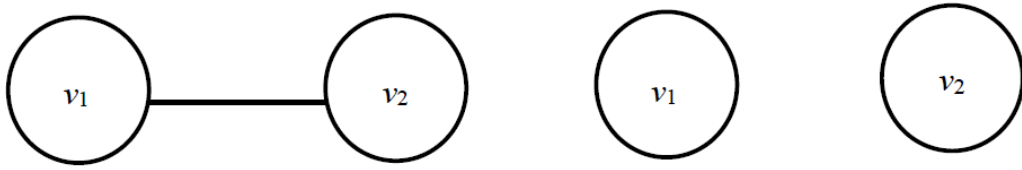
接下來,在語句  $S_9$  中,它減小  $j$  第二個迴圈中索引變數  $j$  的值。重複執行語句  $S_6$  通過語句  $S_9$ ,直到語句  $S_6$  中的條件判斷變為 *false* 值。接下來,在語句  $S_{10}$  中,它增加索引變數  $i$  在第一個迴圈中的值。重複執行語句  $S_4$  通過語句  $S_{10}$ ,直到語句  $S_4$  中的條件判斷變為 *false* 值。當敘述  $S_4$  中條件判斷變為 *false* 值時,下一個執行的陳述是語句  $S_{11}$ 。在語句  $S_{11}$  中,它執行結束指令以終止要計算每個組中的頂點數的任務。在圖 3.9 中完成每個操作的一次成本是實現  $(n \times (n + 1))$  AND 閘和  $(\frac{n \times (n + 1)}{2})$  AND 閘。這就是說,計算一個群的頂點數的成本是實現  $(n \times (n + 1))$

AND 閘和  $(\frac{n \times (n + 1)}{2})$  NOT 閘。因此,對於計算所有團中的頂點數,成本是實現  $(2^n \times n \times (n + 1))$  AND 閘和  $(2^n \times \frac{n \times (n + 1)}{2})$  NOT 閘。

### 3.3.3 最大群問題的資料依賴分析

數據依賴性產生於讀取或寫入同一記憶體的兩個語句。資料相依性分析是決定是否排序或平行化語句是否安全。在最大集團問題對有  $n$  頂點和  $\theta$  邊的圖形  $G = (V, E)$  及其具  $n$  頂點和  $m$  邊緣的互補圖  $\bar{G} = (V, \bar{E})$ ,它包含  $2^n$  頂點的子集 ( $2^n$  可能的選擇)。我們使用一套  $\{x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n \mid \forall x_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq n\}$  編碼  $2^n$  頂點的子集。在集  $\{x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n \mid \forall x_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq n\}$ ,第一個元素  $x_1^0 x_2^0 \dots x_{n-1}^0 x_n^0$  編碼沒有任何頂點的空子集。第二元素  $x_1^0 x_2^0 \dots x_{n-1}^0 x_n^1$  編碼  $\{v_n\}$ 。第三個元素  $x_1^0 x_2^0 \dots x_{n-1}^1 x_n^0$  編碼  $\{v_{n-1}\}$  等等,最後元素  $x_1^1 x_2^1 \dots x_{n-1}^1 x_n^1$  編碼  $\{v_1 v_2 \dots v_{n-1} v_n\}$  包含每個頂點。每個元素需要在圖 3.8 和圖 3.9 中實現這些操作。每個元素需要使用  $m$  次要區  $r_k$  for  $1 \leq k \leq m$ ,  $(m + 1)$  輔助布林變數  $s_k$  for  $0 \leq k \leq m$  和  $((n \times (n + 3)) / 2)$  輔助布林變數  $z_{i+1,j}$  和  $z_{i+1,j+1}$  對於 for  $0 \leq i \leq n - 1$  and  $0 \leq j \leq i$ 。因為  $2^n$  頂點的子集 ( $2^n$  輸入) 實現從圖 3.8 到圖 3.9 的這些說明不自存取或修改相同的輸入和相同的輔助布林變數,我們可以平行化他們沒有任何錯誤。

讓我們考慮圖 3.10a 中的另一個圖形及其圖 3.10b 中的互補圖。在圖 3.10a 中,圖形有兩個頂點 $\{v_1, v_2\}$ 和一個邊 $\{(v_1, v_2)\}$ 。在圖 3.10b 中,its 互補圖具有相同的兩個頂點 $\{v_1, v_2\}$  並且圖 3.10a 中的原始圖形中不存在邊緣。對於圖 3.10a 中的圖形,具有兩個頂點 $\{v_1, v_2\}$ 和一個邊 $\{(v_1, v_2)\}$ 及其互補圖在圖 3.10b 中具有相同的兩個頂點  $\{v_1, v_2\}$ 和沒有邊緣, 解決最大小數問題的解決方法是找到大小  $r$  的頂點的子集  $V^1$  滿足  $V^1$  為最大大小。也就是說, $n$  的值等於 2,值  $\theta$ 等於 1, $m$  的值等於零。



(a) (b)

圖 3.10: (a) 圖形有兩個頂點和一個邊。(b)互補圖形有相同的點,但不存在原來的邊。

我們認為在圖 3.10a 中,使用兩個頂點 $\{v_1, v_2\}$ 和一個邊緣 $\{(v_1, v_2)\}$ 作為搜索問題,將圖形的最大群數問題視為搜索問題。給定的 oracular 函數  $O_f$  是實現從圖 3.8 到圖 3.9 的這些指令,以識別最大團。其網域是 $\{x_1 x_2 | \forall x_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq 2\}$ ,用於編碼  $2^2$ 個頂點子集。在域  $\{x_1 x_2 | \forall x_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq 2\}$ 中,第一個元素  $x_1^0 x_2^0$  編碼沒有頂點的空子集。第二個元素  $x_1^0 x_2^1$  編碼 $\{v_2\}$ 。第三個元素  $x_1^1 x_2^0$  編碼 $\{v_1\}$ 。第四個元素  $x_1^1 x_2^1$  編碼 $\{v_1, v_2\}$ 。

從網域 $\{x_1 x_2 | \forall x_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq 2\}$ , 有四個輸入  $x_1^0 x_2^0$ ,  $x_1^0 x_2^1$ ,  $x_1^1 x_2^0$  和  $x_1^1 x_2^1$ 。由於  $m$  的值等於零,因此圖 3.10b 中的互補圖中沒有邊。因此,每個輸入不需要實現圖 3.8 中的這些說明。每個輸入都是一個團體。這表示空子集  $\{\}$ ,  $\{v_2\}$ ,  $\{v_1\}$ 和 $\{v_1, v_2\}$ 都是單元格。接下來,為了計算每個團中的頂點數,每個輸入都需要在“ $z_{1,1} \leftarrow s_0^1 \wedge x_1$ ”, “ $z_{1,0} \leftarrow s_0^1 \wedge \overline{x_1}$ ”, “ $z_{2,2} \leftarrow x_2 \wedge z_{1,1}$ ”, “ $z_{2,1} \leftarrow \overline{x_2} \wedge z_{1,1}$ ”, “ $z_{2,1} \leftarrow x_2 \wedge z_{1,0}$ ”和 “ $z_{2,0} \leftarrow \overline{x_2} \wedge z_{1,0}$ ”。圖 3.9 中實現每個輸入完成上述六個指令後,輸入  $x_1^1 x_2^1$  具有結果  $z_{2,2}^1$  和其他輸入  $x_1^0 x_2^0$ 、 $x_1^0 x_2^1$  和  $x_1^1 x_2^0$  具有相同的結果  $z_{2,2}^0$ 。由於布爾變數  $z_{2,2}^1$  表示輸入  $x_1^1 x_2^1$  編碼 $\{v_1, v_2\}$ 為最大陣列, 答案是 $\{v_1, v_2\}$ 和答案中的頂點數是 2。由於  $2^2$ 個頂點子集實現上述六個指令,以不訪問或修改相同的輸入和相同的輔助布林變數,因此我們可以並行化它們,而不會有任何錯誤。

### 3.3.4 解決最大群問題實體的解決方案空間

在圖 3.10a 中具有兩個頂點  $\{v_1, v_2\}$  和一個邊  $\{(v_1, v_2)\}$  的圖形中，空子集  $\{\}$ ,  $\{v_2\}$ ,  $\{v_1\}$  和  $\{v_1, v_2\}$  都是群。圖 3.10a 中圖的最大群問題就是查找頂點數為 2 的最大群。設定指令“ $z_{1,1} \leftarrow s_0^1 \wedge x_1$ ”等效於執行指令的“ $z_{1,1} \leftarrow x_1$ ”，其中布林變數  $z_{1,1}$  實際儲存  $x_1$  的值 1。因此，將指令“ $z_{2,2} \leftarrow x_2 \wedge z_{1,1}$ ”等效於實現指令“ $z_{2,2} \leftarrow x_2 \wedge x_1$ ”因此，圖 3.10a 中任何給定的表位函數  $O_f$  可識別圖形的最大群，則實現指令“ $z_{2,2} \leftarrow x_2 \wedge x_1$ ”。其網域為  $\{x_1 x_2 | \forall x_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq 2\}$ ，其範圍為  $\{0, 1\}$ 。

我們認為其網域是其解決方案空間，其中有四種可能的選擇，滿足  $O_f = F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2 = 1$ 。我們使用四維 Hilbert 空間的基礎  $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$  來建構解決方案空間  $\{x_1 x_2 | \forall x_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq 2\}$ 。我們使用  $(1, 0, 0, 0)$  對布爾變數  $x_1^0$  和布爾變數  $x_2^0$  進行編碼，這些變數表示一個空群  $\{\}$ ，沒有任何頂點。接下來，我們應用  $(0, 1, 0, 0)$  來編碼布爾變數  $x_1^1$  和布爾變數  $x_2^0$ ，表示一個團體  $\{v_1\}$ 。我們使用  $(0, 0, 1, 0)$  來編碼布爾變數  $x_1^0$  和布爾變數  $x_2^1$ ，表示一個團體  $\{v_2\}$ 。最後，我們應用  $(0, 0, 0, 1)$  來編碼布爾變數  $x_1^1$  和布爾變數  $x_2^1$ ，表示最大團體  $\{v_1, v_2\}$ 。

我們使用每個元素的線性組合，基礎是  $\frac{1}{\sqrt{2^2}} \times (1, 0, 0, 0) + \frac{1}{\sqrt{2^2}} \times (0, 1, 0, 0) + \frac{1}{\sqrt{2^2}} \times (0, 0, 1, 0) + \frac{1}{\sqrt{2^2}} \times (0, 0, 0, 1) = (\frac{1}{\sqrt{2^2}}, \frac{1}{\sqrt{2^2}}, \frac{1}{\sqrt{2^2}}, \frac{1}{\sqrt{2^2}})$ ，構造解決方案空間  $\{x_1 x_2 | \forall x_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq 2\}$ 。每個可能選擇的振幅全部，每個振幅的絕對值的  $\frac{1}{\sqrt{2^2}}$  平方之和為 1。向量的長度為 1，因此它是一個單位向量。這表明我們利用單位向量對滿足  $O_f = F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$  的所有可能選項進行編碼。我們將每個振幅的絕對值的平方稱為滿足給定的任地函數  $O_f = F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$  的該選擇的成本(成功概率)。答案的成本(成功概率)儘快接近一個。

### 3.3.5 實現解決方案空間,解決最大群問題的實例

在清單 3.2 中,後端 *ibmqx4* 中具有 5 個量子位元的量子電腦,在圖 3.10a 中,使用兩個頂點  $\{v_1, v_2\}$  和一個邊緣  $\{(v_1, v_2)\}$  解決圖形的最大群數問題的實例。由於識別最大群，給定的 oracular 函數是  $O_f = F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$ ，在清單 3.2 中，我們介紹如何編寫量子程式以查找每個布爾變數的值，以便整個公式具有值 1。圖 3.11 是構建解決方案空間的量子電路。語句“OPENQASM 2.0;”

1. OPENQASM 2.0;

```

2. include "qelib1.inc";
3. qreg q[5];
4. creg c[5];
5. x q[0];
6. h q[3];
7. h q[4];
8. h q[0];

```

清單 3.2:在圖 3.10a 中,用兩個頂點 $\{v_1, v_2\}$ 和一個邊  $\{(v_1, v_2)\}$ 將最大群問題實例求解到圖形的程式。

清單 3.2 的第一行指出,程式是使用 Open QASM 的 2.0 版本編寫的。接下來,他的聲明“include "qelib1.inc";”在清單 3.2 的第二行是繼續解析檔 “qelib1.inc”,彷彿檔的內容粘貼在包含語句的位置,其中檔“qelib1.inc”是量子體驗(QE)標準頭,他路徑是相對於當前工作目錄。

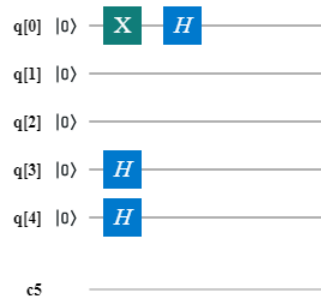


圖 3.11:在圖 3.10a 中,用兩個頂點  $\{v_1, v_2\}$ 和一個邊  $\{(v_1, v_2)\}$ 構造解決方案空間到最大群問題實例的量子電路。

接下來,語句“qreg q[5];”在清單 3.2 的第三行,是聲明程式中有五個量子位元。在圖 3.11 的左上角,五個量子位元分別為  $q[0]$ 、 $q[1]$ 、 $q[2]$ 、 $q[3]$  和  $q[4]$ 。每個量子位元的初始值設置為  $|0\rangle$ 。我們應用量子位元  $q[3]$ 來編碼布爾變數  $x_1$ 。我們使用量子位元  $q[4]$ 來編碼布爾變數  $x_2$ 。我們利用量子位元  $q[2]$ 對輔助布爾變數  $z_{2,2}$ 進行編碼。我們將量子位元  $q[0]$ 作為輔助工作位。我們不使用量子位元  $q[1]$ 。

為了便於我們解釋  $q[k]^0$  for  $0 \leq k \leq 4$  表示  $q[k]$ 的值 0,  $q[k]^1$  表示  $0 \leq k \leq 4$  的值,表示  $q[k]$ 的值 1。同樣,為了便於我們解釋,圖 3.10a 中具有兩個頂點 $\{v_1, v_2\}$ 和一個邊 $\{(v_1, v_2)\}$ 的圖形中最大群問題實例構造解決方案空間的初始狀態向量如下:

$$|\alpha_0\rangle = |q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle |q[2]^0\rangle |q[1]^0\rangle |q[0]^0\rangle = |0\rangle |0\rangle |0\rangle |0\rangle |0\rangle = |00000\rangle$$

接下來,語句"creg c[5];在清單 3.2 的第四行,是宣告程式中有五個經典位元。在圖 3.11 的左下部,五個經典位元隨後為 c[0]、c[1]、c[2]、c[3] 和 c[4]。每個經典位元的初始值設置為 0。

接著,三個語句"x q[0];", "h q[3];" and "h q[4];"在清單 3.2 的第五到第七行,如圖 3.11 中,量子電路第一個時隙的 X 閘(一個 **NOT** 閘)和兩個 Hadamard 門。語句

"x q[0];"實際實現 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (|1\rangle)$ 。這就是說聲明"x q[0];"在清單 3.2

第五行,對數 $|q[0]^0\rangle (|0\rangle)$  進入  $|q[0]^1\rangle (|1\rangle)$ 。兩個語句"h q[3];" and "h q[4];"兩者

實際執行 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle +$

$|1\rangle)$ 。這意味著實現將 q[3] 從一個狀態  $|0\rangle$  轉換為另一個狀態 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ (其

疊加 superposition)和將 q[4] 從一個狀態  $|0\rangle$  轉換為另一個狀態 $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$

(其疊加 superposition)。因此,兩個量子位元 q[4]和 q[3]的疊加是 $(\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle))$

$(\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)) = \frac{1}{2} (|0\rangle |0\rangle + |0\rangle |1\rangle + |1\rangle |0\rangle + |1\rangle |1\rangle) = \frac{1}{2} (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle +$

$|11\rangle)$ 。由於在圖 3.11 中量子電路的第一個時隙中,沒有量子閘對量子位元 q[2]和 q[1]執行操作,因此其當前狀態  $|q[2]^0\rangle$  和  $|q[1]^0\rangle$ 不會更改。這表明我們獲取了以下新的狀態向量

$$\begin{aligned} |\alpha_1\rangle &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (|q[4]^0\rangle + |q[4]^1\rangle) \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (|q[3]^0\rangle + |q[3]^1\rangle) \right) (|q[2]^0\rangle |q[1]^0\rangle |q[0]^1\rangle) \\ &= \frac{1}{2} (|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle) (|q[2]^0\rangle \\ &\quad |q[1]^0\rangle |q[0]^1\rangle) \\ &= \frac{1}{2} (|0\rangle |0\rangle + |0\rangle |1\rangle + |1\rangle |0\rangle + |1\rangle |1\rangle) (|0\rangle |0\rangle |1\rangle). \end{aligned}$$

然後,語句"h q[0];"在清單 3.2 的第 8 行,將執行圖 3.11 中量子電路第二個時隙

的一個 Hadamard 門。語句 t "h q[0];" 實際實現 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle)$ 。這意味著執行將 q[0] 從一個狀態

$|1\rangle$  轉換為另一種狀態  $\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle)$  (其疊加 superposition)。因為在圖 3.11 量子電路的第二個時隙中,沒有量子閘對量子位元  $q[4]$  通過  $q[1]$  執行作用,因此其當前狀態不會改變。也就是說,我們獲得了以下新的狀態向量

$$\begin{aligned} |\alpha_2\rangle &= \left( \frac{1}{2} (|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle) \right) (|q[2]^0\rangle \\ &\quad |q[1]^0\rangle) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (|q[0]^0\rangle - |q[0]^1\rangle) \right) \\ &= \left( \frac{1}{2} (|0\rangle |0\rangle + |0\rangle |1\rangle + |1\rangle |0\rangle + |1\rangle |1\rangle) \right) (|0\rangle |0\rangle) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) \right). \end{aligned}$$

在新的狀態向量中  $|\alpha_2\rangle$ , 狀態  $|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle$  編碼布林變數  $x_1^0$  和布林變數  $x_2^0$  表示沒有任何頂點的可能選擇。狀態  $|q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle$  編碼布林變數  $x_1^1$  和布林變數  $x_2^0$  表示第一個頂點  $v_1$  的可能選擇。狀態  $|q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle$  編碼布林變數  $x_1^0$  和布林變數  $x_2^1$  表示第二個頂點  $v_2$  的可能選擇。狀態  $|q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle$  編碼布林變數  $x_1^1$  和布林變數  $x_2^1$  表示兩個頂點  $v_1$  和  $v_2$  的可能選擇。每個可能選擇的振幅是  $\frac{1}{\sqrt{2^2}}$ , 成為每個可能選擇的答案的成本(成功的可能性)是相同的, 等於  $\frac{1}{2^2} = 1/4$

### 3.3.6 Oracle 到最大群問題的實例

為了在圖 3.10a 中用兩個頂點  $\{v_1, v_2\}$  和一個邊  $\{(v_1, v_2)\}$  解決圖形的最大群問題, Oracle 能夠識別最大群。Oracle 將最大群的概率振幅乘以 -1, 並且保持不變。由於辨識最大群的表位函數是  $O_f = F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_{2,2}$ , Oracle 解決最大群問題的

實體是  $(2^2 \times 2^2)$  矩陣  $B$  等於  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$

我們認為  $(2^2 \times 2^2)$  矩陣  $B^+$  是矩陣  $B$  的偶聯轉置。矩陣  $B$  的轉置 matrix 等於自身, 矩陣  $B$  的轉置中的每個元素都是實數, 因此矩陣  $B$  的偶聯轉置也等於自身 (矩陣  $B$ )。因此, 我們取得  $B^+ = B$ 。因為矩陣  $B$  及其偶聯轉置  $B^+$  幾乎為  $(2^2 \times 2^2)$  單位矩陣,  $B \times B^+ = I_{2^2 \times 2^2}$  and  $B^+ \times B = I_{2^2 \times 2^2}$  因此, 我們得到  $B \times B^+ = B^+ \times B$ 。這表明它是一個統一矩陣(運算子), 用兩個頂點  $\{v_1, v_2\}$  和一個邊  $\{(v_1, v_2)\}$  與給定的 oracular 函數  $O_f = F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$  解決圖形中最大群問題的實例。實現最大群問題的實例中, 給定的 oracular 函數, 相當於實現 Oracle, 即

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2^2}} \end{pmatrix}_{4 \times 1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2^2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2^2}} \end{pmatrix}_{4 \times 1} = \frac{1}{\sqrt{2^2}} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{4 \times 1} + \frac{1}{\sqrt{2^2}} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{4 \times 1} + \frac{1}{\sqrt{2^2}} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{4 \times 1} + \frac{-1}{\sqrt{2^2}} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{4 \times 1} = \frac{1}{\sqrt{2^2}} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2^2}} |01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2^2}} |10\rangle + \frac{-1}{\sqrt{2^2}} |11\rangle.$$

四個計算基礎向量  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{4 \times 1}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{4 \times 1}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{4 \times 1}$  and  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{4 \times 1}$  並編碼四個狀態  $|00\rangle (|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle)$ ,  $|01\rangle (|q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle)$ ,  $|10\rangle (|q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle)$  and  $|11\rangle (|q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle)$ 。他們目前的振幅為  $(\frac{1}{\sqrt{2^2}})$ ,  $(\frac{1}{\sqrt{2^2}})$ ,  $(\frac{1}{\sqrt{2^2}})$  and  $(\frac{-1}{\sqrt{2^2}})$ 。狀態  $|00\rangle (|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle)$  與振幅  $(\frac{1}{\sqrt{2^2}})$  編碼布林變數  $x_1^0$  和布爾變數  $x_2^0$  表示一種無需任何頂點的可能選擇。狀態  $|01\rangle (|q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle)$  與振幅  $(\frac{1}{\sqrt{2^2}})$  編碼布林變數  $x_1^1$  和布林變數  $x_2^0$  表示第一個頂點  $v_1$  的可能選擇。狀態  $|10\rangle (|q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle)$  與振幅  $(\frac{1}{\sqrt{2^2}})$  編碼布林變數  $x_1^0$  和布林變數  $x_2^1$  表示第二個頂點  $v_2$  的可能選擇。狀態  $|11\rangle (|q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle)$  與振幅  $(\frac{-1}{\sqrt{2^2}})$  編碼布林變數  $x_1^1$  和布爾變數  $x_2^1$  表示最大群與兩個頂點  $v_1$  和  $v_2$ 。這表明 Oracle 多數將最大群的概率振幅與兩個頂點  $v_1$  和  $v_2$  乘  $-1$ ，並且保持不變任何其他振幅。

### 3.3.7 將 Oracle 實施到最大群問題實例

我們應用一個 **CCNOT** 閘來執行給定的 oracular 函數  $O_f = F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$  該閘在圖 3.10a 中用兩個頂點  $\{v_1, v_2\}$  和一個邊緣  $\{(v_1, v_2)\}$  識別最大群問題。我們利用量子位元  $q[3]$  來編碼布爾變數  $x_1$ ，我們使用量子位元  $q[4]$  來編碼布爾變數  $x_2$ ，我們應用量子位元  $q[2]$  來編碼布爾變數  $x_2$ 。因此，量子位元  $q[3], q[4], q[2]$  是隨後的第一個控制位，第二個控制位和 **CCNOT** 閘的目標位元。我們使用 **CCNOT** 閘

來實現邏輯 AND 操作,因此量子位元  $q[2]$  的初始值設置為  $|0\rangle$ 。

從清單 3.2 中的第九行到第二十三行,有十五個語句。它們隨後被“h q[2];”, “cx q[4],q[2];”, “tdg q[2];”, “cx q[3],q[2];”, “t q[2];”, “cx q[4],q[2];”, “tdg q[2];”, “cx q[3],q[2];”, “t q[4];”, “t q[2];”, “cx q[3],q[4];”, “h q[2];”, “t q[3];”, “tdg q[4];” and “cx q[3], q[4];”。

### Listing 3.2 continued...

// We use the following *fifteen* statements to implement a **CCNOT** gate.

```

9  h q[2];
10 cx q[4],q[2];
11 tdg q[2];
12 cx q[3],q[2];
13 t q[2];
14 cx q[4],q[2];
15 tdg q[2];
16 cx q[3],q[2];
17 t q[4];
18 t q[2];
19 cx q[3],q[4];
20 h q[2];
21 t q[3];
22 tdg q[4];
23 cx q[3], q[4];

```

t q[2];”, “cx q[4],q[2];”, “tdg q[2];”, “cx q[3],q[2];”, “t q[4];”, “t q[2];”, “cx q[3],q[4];”, “h q[2];”, “t q[3];”, “tdg q[4];” and “cx q[3], q[4];”。

它們完成 **CCNOT** 閘,實現給定的 oracular 函數  $O_f = F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$ 。在圖 3.10a 中用兩個頂點  $\{v_1, v_2\}$  與一個邊  $\{(v_1, v_2)\}$  識別圖形中最大群與問題。圖 3.12 是實現給定的 oracular 函數  $O_f = F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$  的量子電路,用於識別圖中最大群問題,圖 3.10a 中具有兩個頂點  $\{v_1, v_2\}$  和一個邊緣  $\{(v_1, v_2)\}$ 。

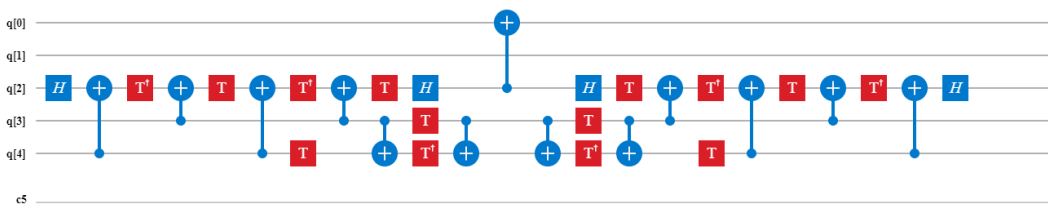


圖 3.12: 實現給定的 oracular 函數  $O_f = F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$  的量子電路,用於識別圖中最大群問題,圖 3.10a 中具有兩個頂點  $\{v_1, v_2\}$  和一個邊緣  $\{(v_1, v_2)\}$ 。

它們採用狀態向量  $|\alpha_2\rangle = (\frac{1}{2} (|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle)) (|q[2]^0\rangle |q[1]^0\rangle) (\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[0]^0\rangle - |q[0]^1\rangle))$  作為輸入。在它們實際執行六個 **CNOT** 閘、兩個 Hadamard 閘、三個 **T<sup>+</sup>** 閘和四個 **T** 閘後,從第一個時隙到圖 3.12 中的第 11 個時隙,我們獲得以下新的狀態向量

$$\begin{aligned} |\alpha_3\rangle &= (\frac{1}{2} (|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle |q[2]^0\rangle + |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle |q[2]^0\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle |q[2]^0\rangle + \\ &\quad |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle |q[2]^1\rangle)) (|q[1]^0\rangle) (\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[0]^0\rangle - |q[0]^1\rangle)) \\ &= (\frac{1}{2} (|0\rangle |0\rangle |0\rangle + |0\rangle |1\rangle |0\rangle + |1\rangle |0\rangle |0\rangle + |1\rangle |1\rangle |1\rangle)) (|0\rangle) (\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle)). \end{aligned}$$

然後,從清單 3.2 的第 24 行,語句“cx q[2],q[0];”採用新的狀態向量  $|\alpha_3\rangle$  作為其輸入。它將答案的概率振幅

**Listing 3.2 continued...**

```
// The Oracle multiplies the probability amplitude of the maximal-sized clique {v1,
// v2} by -1 and leaves any other amplitude unchanged.

24 cx q[2],q[0];
```

$|q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle$  編碼 最大群  $\{v_1, v_2\}$  乘以 -1, 使任何其他振幅不變。這意味著,在陳述“cx q[2],q[0];”完成圖 3.12 中第十二個時隙中的 **CNOT** 閘之後,我們將獲得以下新的狀態向量

$$\begin{aligned} |\alpha_4\rangle &= (\frac{1}{2} (|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle |q[2]^0\rangle + |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle |q[2]^0\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle |q[2]^0\rangle + \\ &\quad (-1) |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle |q[2]^1\rangle)) (|q[1]^0\rangle) (\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[0]^0\rangle - |q[0]^1\rangle)) \\ &= (\frac{1}{2} (|0\rangle |0\rangle |0\rangle + |0\rangle |1\rangle |0\rangle + |1\rangle |0\rangle |0\rangle + (-1) |1\rangle |1\rangle |1\rangle)) (|0\rangle) (\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - \\ &\quad |1\rangle)). \end{aligned}$$

由於量子運算本質上是可逆的,因此執行 實現 **CCNOT** 閘的反向順序可以將輔助曲原子位還原到其初始狀態。從清單 3.2 的第二十五行到第 39 行,有十五個語句。它們是“cx q[3],q[4];”, “tdg q[4];”, “t q[3];”, “h q[2];”, “cx q[3],q[4];”, “t q[2];”, “t q[4];”, “cx q[3],q[2];”, “tdg q[2];”, “cx q[4],q[2];”, “t q[2];”, “cx q[3],q[2];”, “tdg q[2];”, “cx q[4],q[2];” and “h q[2];”。它們執行相反的實現順序

#### Listing 3.2 continued...

```
// Because quantum operations are reversible by nature, executing the reversed
// order of implementing the CCNOT gate can restore the auxiliary quantum bits
// to their initial states.
```

```
25 cx q[3],q[4];
26 tdg q[4];
27 t q[3];
28 h q[2];
29 cx q[3],q[4];
30 t q[2];
31 t q[4];
32 cx q[3],q[2];
33 tdg q[2];
34 cx q[4],q[2];
35 t q[2];
36 cx q[3],q[2];
37 tdg q[2];
38 cx q[4],q[2];
39 h q[2];
```

執行給定的 oracular 函數  $O_f = F(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$  的 **CCNOT** 閘,識別最大群。它們採用新的狀態向量  $|\alpha_4\rangle$  作為他們的輸入。在它們實際完成六個 **CNOT** 閘、兩個 Hadamard 閘、三個 **T**<sup>+</sup> 閘和四個 **T** 閘後,從第十三個時隙通過圖 3.12 中的最後一個時隙,我們獲得以下新的狀態向量 *last*

$$|\alpha_5\rangle = \left(\frac{1}{2} (|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle + (-1) |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle)\right) \\ (|q[2]^0\rangle |q[1]^0\rangle) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[0]^0\rangle - |q[0]^1\rangle)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} (|0\rangle|0\rangle + |0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle + (-1)|1\rangle|1\rangle)\right) (|0\rangle|0\rangle) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle)\right)$$

在狀態向量中  $|\alpha_2\rangle$ , 解決方案空間中每個元素的振幅  $\{x_1 x_2 | \forall x_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq 2\}$  是  $(1/2)$ 。在狀態向量中  $|\alpha_5\rangle$ , 振幅到三個元素  $x_1^0 x_2^0$  編碼一個空團,  $x_1^0 x_2^1$  編碼一個團  $\{v_2\}$ ,  $x_1^1 x_2^0$  編碼一個團  $=v_1$  在解決方案空間中是所有  $(1/2)$  和元素  $x_1^1 x_2^1$  編碼的最大群  $\{v_1, v_2\}$  的振幅是  $(-1/2)$ 。這就是說, 清單 3.2 中第 9 行

至第 39 行的 31 個語句完成 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{4 \times 4} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2^2}} \end{pmatrix}_{4 \times 1}, \text{ 即實現識別最大群}$$

的 Oracle, 在圖 3.10a 中使用兩個頂點  $\{v_1, v_2\}$  和一個邊緣  $\{(v_1, v_2)\}$  解決圖形中的最大群數問題。

### 3.3.8 實施 Grover 擴散運算符, 以放大最大 Clique 問題實例中解決方案的振幅

他新的狀態向量  $|\alpha_5\rangle$  是  $\left(\frac{1}{2} (|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle + (-1)|q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle)\right) (|q[2]^0\rangle |q[1]^0\rangle) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[0]^0\rangle - |q[0]^1\rangle)\right)$ 。它包括兩個獨立的子系統。第一個子系統是  $\left(\frac{1}{2} (|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle + (-1)|q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle)\right)$  第二個子系統是  $(|q[2]^0\rangle |q[1]^0\rangle) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|q[0]^0\rangle - |q[0]^1\rangle)\right)$ 。放大每個在圖 3.10a 中解決方案的幅度, 用兩個頂點  $[v_1, v_2]$  和圖 3.10a 中的一個邊  $[(v_1, v_2)]$  放大圖形中最大組合題中每個解決方案的振幅, 只需要考慮新狀態向量中的

第一個子系統  $|\alpha_5\rangle$ 。由於對於最大群問題的實例,  $(2^2 \times 1)$  向量 
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2^2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2^2}} \end{pmatrix}_{4 \times 1}$$
 編碼新狀

態向量的第一個子系統  $|\alpha_5\rangle$  和  $\begin{pmatrix} \frac{2}{2^2}-1 & \frac{2}{2^2} & \frac{2}{2^2} & \frac{2}{2^2} \\ \frac{2}{2^2} & \frac{2}{2^2}-1 & \frac{2}{2^2} & \frac{2}{2^2} \\ \frac{2}{2^2} & \frac{2}{2^2} & \frac{2}{2^2}-1 & \frac{2}{2^2} \\ \frac{2}{2^2} & \frac{2}{2^2} & \frac{2}{2^2} & \frac{2}{2^2}-1 \end{pmatrix}$  是一個

$(2^2 \times 2^2)$  擴散運算子，使溶液的振幅達到來實現

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{2^2}-1 & \frac{2}{2^2} & \frac{2}{2^2} & \frac{2}{2^2} \\ \frac{2}{2^2} & \frac{2}{2^2}-1 & \frac{2}{2^2} & \frac{2}{2^2} \\ \frac{2}{2^2} & \frac{2}{2^2} & \frac{2}{2^2}-1 & \frac{2}{2^2} \\ \frac{2}{2^2} & \frac{2}{2^2} & \frac{2}{2^2} & \frac{2}{2^2}-1 \end{pmatrix}_{2^2 \times 2^2} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2^2}} \end{pmatrix}_{4 \times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{4 \times 1}$$

這表明編碼最大

大小的小團的溶液的振幅 $[v_1, v_2]$  為 1,其他三種可能選擇的振幅為零。

圖 3.13 中的量子電路實現了格羅夫擴散運算符 $H^{\otimes 2}(2|0^{\otimes 2}\rangle\langle 0^{\otimes 2}| - I_{2^2 \times 2^2})H^{\otimes 2}$ 。從清單 3.2 中的第四十行到第五十一行,有十二個語句。隨後“h q[3];”, “h q[4];”, “x q[3];”, “x q[4];”, “h q[4];”, “cx q[3],q[4];”, “h q[4];”, “x q[4];”, “x q[3];”, “u3(2\*pi,0\*pi,0\*pi) q[3];”, “h q[4];” 和 “h q[3];”

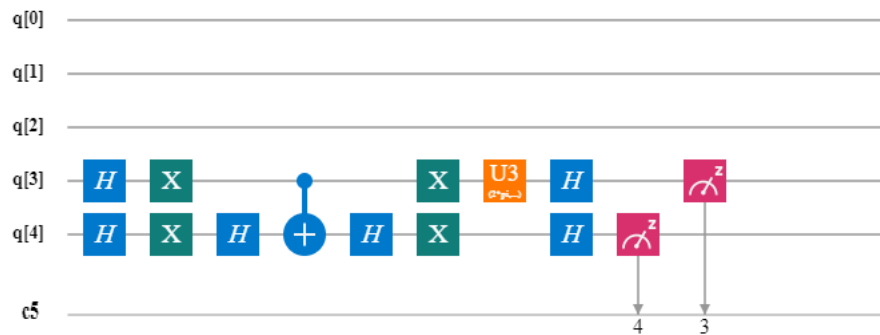


圖 3.13:實現 Grover 擴散運算符 $H^{\otimes 2}(2|0^{\otimes 2}\rangle\langle 0^{\otimes 2}| - I_{2^2 \times 2^2})H^{\otimes 2}$ 的量子電路,到圖 3.10a 中具有兩個頂點  $[v_1, v_2]$ 和一個邊  $[(v_1, v_2)]$ 的圖形中最大團問題的實例。

#### Listing 3.2 continued...

```
//We complete the amplitude amplification of the answer.
```

```
40 h q[3];
```

```
41 h q[4];
```

```
// We complete phase shifters
```

```

42 x q[3];
43 x q[4];
44 h q[4];
45 cx q[3],q[4];
46 h q[4];
47 x q[4];
48 x q[3];
49 u3(2_pi,0_pi,0_pi) q[3];

50 h q[4];
51 h q[3];

```

它們採用新的狀態向量  $|\alpha_5\rangle = \frac{1}{2} (|q[4]^0\rangle |q[3]^0\rangle + |q[4]^0\rangle |q[3]^1\rangle + |q[4]^1\rangle |q[3]^0\rangle + (-1) |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle)$  作為輸入。它們完成擴散運算子  $H^{\otimes 2} (2 |0^{\otimes 2}\rangle \langle 0^{\otimes 2}| - I_{2^2 \times 2^2}) H^{\otimes 2}$  從圖 3.13 中的第一個時隙到第八個時隙。也就是說,我們獲得了以下新的狀態向量

$$|\alpha_6\rangle = |q[4]^1\rangle |q[3]^1\rangle。$$

接下來,從清單 3.2 第 52 行的陳述“measure q[4] -> c[4];”是測量第五個量子位元 q[4],並通過覆蓋第五個經典位元 c[4]來記錄測量結果。從清單 3.2 中第 53 行,陳述“measure q[3] -> c[3];”是測量第四個量子位元 q[3],並通過覆蓋第四個經典位元 c[3]來記錄測量結果。它們實現從圖 3.13 的第九個時隙到第十個時隙的測量。

#### Listing 3.2 continued...

```

// We complete the measurement of the answer.

52 measure q[4] -> c[4];
53 measure q[3] -> c[3];

```

在後端 *ibmqx4* 中,在 **IBM** 的量子電腦中具有五個量子位元,我們應用命令“類比”來執行清單 3.2 中的程式。測量結果如圖 3.14 所示。從圖 3.14 中,我們得到的答案 11000 ( $c[4] = q[4] = |1\rangle$ ,  $c[3] = q[3] = |1\rangle$ ,  $c[2] = q[2] = |0\rangle$ ,  $c[1] = q[1] = |0\rangle$  和  $c[0] = q[0] = |0\rangle$ ) 概率為 1(10%)。這意味著,與可能性 1(100%)我們得到量子位元 q[3] 的值等於  $|1\rangle$ ; 量子位元 q[4] 的值等於  $|1\rangle$ ;。因此,最大群是  $\{v_1, v_2\}$ 。

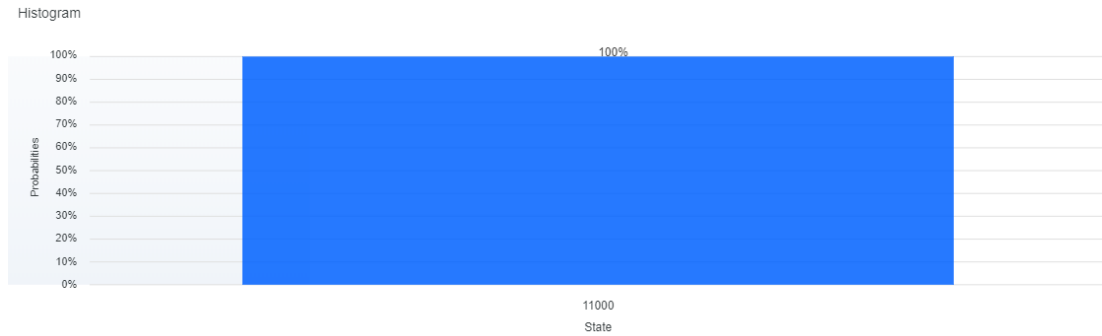


圖 3.14:在計算完成計算後,在圖 3.10a 中用兩個頂點  $\{v_1, v_2\}$ 和一個邊 $\{(v_1, v_2)\}$ 求解圖中最大團問題的實例後,我們獲得答案 11000,概率 1 (100%)。

### 3.3.9 量子搜索演算法對最大群問題

圖形  $G = (V, E)$ 具有  $n$  個頂點 $\theta$ 和邊及其互補圖  $=\bar{G}(V, \bar{E})$ 的最大群問題,其中每個邊都出  $E$  的  $n$  頂點和  $\bar{E}$  邊,在  $2^n$ 個頂點子集之間找到最大大小的群體。任何給定的孔函數  $O_f(x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n)$ 都是在  $2^n$ 個頂點子集中識別最大群。它實現了圖 3.8 中識別群的流程圖。接下來,它實現了計算圖 3.9 中每個團中的頂點數的流程圖。我們利用量子搜索演算法在  $2^n$ 個頂點的子集中查找  $M$  解之一,其中  $0 \leq M \leq 2^n$ 。

圖 3.15 中的量子電路是完成量子搜索演算法

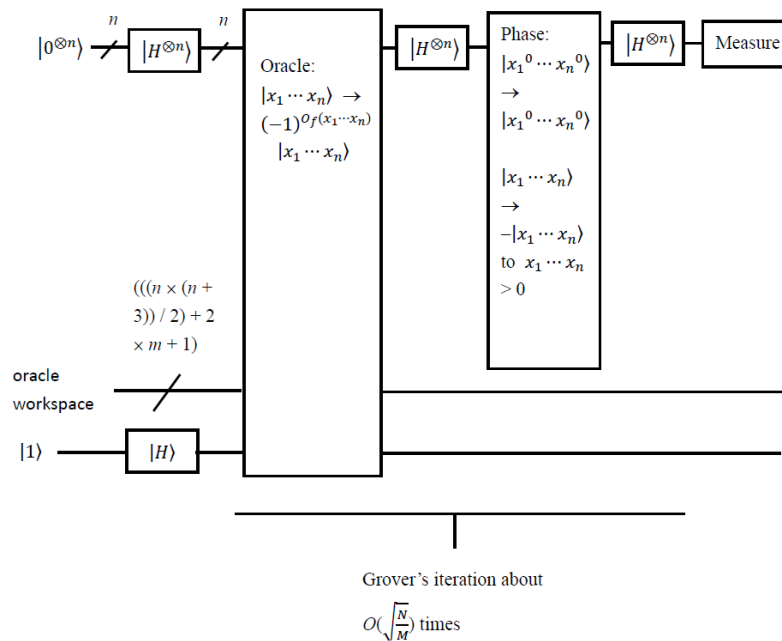


圖 3.15:實現量子搜索演算法的電路,以求解  $n$  個頂點和  $\theta$ 邊緣的圖形  $G=(V,E)$ 中最

大問題實例。

在圖形  $G = (V, E)$  中求解具有  $n$  個頂點和  $\theta$  邊緣的最大小團問題的實體。圖 3.15 左上部的第一個量子寄存器是  $(|0^{\otimes n})$ 。這意味著每個量子位元的尼特值是  $|0\rangle$ 。圖 3.15 左下部的第二個量子寄存器具有  $((n \times (n + 3)) / 2) + 2 \times m + 1$  個量子位元,是輔助量子寄存器。第二個量子寄存器中每個量子位元的初始值是  $|0\rangle$  或  $|1\rangle$ 這依賴於實現 **NAND** 操作或 **AND** 操作。圖 3.15 左下部的第三個量子寄存器是  $(|1\rangle)$ 。

### 3.3.10 量子搜索演算法對最大群問題的第一階段

在圖 3.15 中,解決具有  $n$  個頂點和  $\theta$  個邊的圖形  $G = (V, E)$  中最大群問題實例的量子搜索問題的第一階段是應用  $n$  個量子閘( $H^{\otimes n}$ )操作第一個量子寄存器( $|0^{\otimes n})$ )。也就是說,它產生的  $n$  個量子位元的疊加,即

$(\bigotimes_{k=1}^n (\frac{|x_k^0\rangle + |x_k^1\rangle}{\sqrt{2}})) = \frac{1}{\sqrt{2^n}} (\sum_{\{x_1 x_2 \dots x_n | \forall x_d \in \{0,1\} \text{ for } 1 \leq d \leq n\}} |x_1 x_2 \dots x_n\rangle)$ 。疊加  $\frac{1}{\sqrt{2^n}} (\sum_{\{x_1 x_2 \dots x_n | \forall x_d \in \{0,1\} \text{ for } 1 \leq d \leq n\}} |x_1 x_2 \dots x_n\rangle)$  這表示  $|x_1^0 x_2^0 \dots x_n^0\rangle$  編碼解決方案空間  $\{x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n | \forall x_d \in \{0, 1\} \text{ for } 1 \leq d \leq n\}$  求解  $n$  個頂點和  $\theta$  邊緣的圖形  $G=(V,E)$  中最大問題實例。這表示狀態  $(|x_1^0 x_2^0 \dots x_n^0\rangle)$  具有振幅  $(\frac{1}{\sqrt{2^n}})$  表示頂點的空子集(選擇),狀態  $(|x_1^0 x_2^0 \dots x_n^1\rangle)$  的空子集其振幅  $(\frac{1}{\sqrt{2^n}})$  編碼  $\{v_n\}$ , 以及具有  $(|x_1^1 x_2^1 \dots x_n^1\rangle)$  振幅  $(\frac{1}{\sqrt{2^n}})$  編碼  $\{v_1 v_2 \dots v_n\}$  的空子集(選擇)。在量子搜索演算法的第一階段,它使用另一個量子閘來操作第三個量子寄存器  $(|1\rangle)$ 。這意味著它產生第三個量子寄存器  $(|1\rangle)$  的疊加,即  $(\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle))$

### 3.3.11 量子搜索演算法對最大群問題的第二階段

在圖 3.15 中,量子搜索演算法的第二階段,用於解決圖形  $G = (V, E)$  中最大群問題實例,其中有  $n$  個頂點和  $\theta$  邊,其互補圖  $\bar{G}=(V,\bar{E})$ , 具有  $n$  個頂點和  $m$  邊,其中每個邊都出於  $E$ ,以實現預測。預測可識別在  $2^n$  個頂點子集(可能的選擇)中最大大小的群解。預測將最大大小的小團(s)透過乘以-1 並且保持其他幅度不變。

預測的第一個主要任務是,在  $2^n$  個可能的頂點選項(子集)中識別組等效於實現窗體的公式( $\bigwedge_{k=1}^m (\overline{x_i \wedge x_j})$ )。也就是說,為了完成預測的第一個主要任務,我們需要使用  $(2 \times m + 1)$  輔助量子位元,並完成  $m$  **NAND** 操作和  $m$  **AND** 操作,相當於實現  $(2 \times m)$  **CCNOT** 閘。

接下來,預測的第二個主要任務是計算每個組中的頂點數 **clique** 等效於確定每個頂點的影響是增加每個組頂點數或將頂點數保留為每個組。這表明,為了執行預測的第二個主要任務,我們需要使用  $((n \times (n + 3)) / 2)$  輔助量子位元,並實現  $(n \times (n + 1))$  **AND** 操作和  $(\frac{n \times (n + 1)}{2})$  **NOT** 等於完成  $(n \times (n + 1))$  **CCNOT** 閘和  $(\frac{n \times (n + 1)}{2})$  **NOT** 閘的操作。

在量子搜索演算法第二階段的預測工作區中,我們利用輔助量子位元  $|r_k\rangle$  for  $1 \leq k \leq m$  編碼輔助布林變數  $r_k$   $1 \leq k \leq m$ 。我們應用輔助量子位元  $|s_k\rangle$  for  $0 \leq k \leq m$  編碼輔助布林變數  $s_k$  為  $0 \leq k \leq m$ 。我們使用輔助量子位元  $|z_{i+1,j}\rangle$  and  $|z_{i+1,j+1}\rangle$  for  $0 \leq i \leq n - 1$  and  $0 \leq j \leq i$  編碼輔助布爾變數  $z_{i+1,j}$  and  $z_{i+1,j+1}$  for  $0 \leq i \leq n - 1$  and  $0 \leq j \leq i$ 。

我們使用 **CCNOT** 閘在組成( $\bigwedge_{k=1}^m (\overline{x_i \wedge x_j})$ )的公式中實現每個 **NAND** 閘( $\overline{x_i \wedge x_j}$ ), 我們應用輔助量子位元  $|r_k\rangle$  for  $1 \leq k \leq m$  用於儲存實現每個 **NAND** 閘( $\overline{x_i \wedge x_j}$ )的結果。這就是說,每個輔助量子位元  $|r_k\rangle$  for  $1 \leq k \leq m$  實際上是實現 **NAND** 閘( $\overline{x_i \wedge x_j}$ )的 **CCNOT** 閘的目標位元。因此,每個輔助量子位元的初始值  $|r_k\rangle$  for  $1 \leq k \leq m$  設置為  $|1\rangle$ 。

我們使用輔助量子位元  $|s_0\rangle$  作為表單( $\bigwedge_{k=1}^m (\overline{x_i \wedge x_j})$ )公式中第一個邏輯和操作 (" $\wedge$ ")的第一個操作數。輔助量子位元的初始值  $|s_0\rangle$  設置為  $|1\rangle$ 。這表示此設置不會更改第一個邏輯和操作的正確結果。我們使用 **CCNOT** 閘在窗體( $\bigwedge_{k=1}^m (\overline{x_i \wedge x_j})$ )的公式中實現每個邏輯和操作。我們應用輔助量子位元  $|s_k\rangle$  for  $1 \leq k \leq m$  用於儲存實現每個邏輯和操作的結果。這意味著每個輔助量子位元  $|s_k\rangle$  for  $1 \leq k \leq m$  實際上是實現邏輯和操作的 **CCNOT** 閘的目標位元。因此,每個輔助量子位元的初始值  $|s_k\rangle$  for  $1 \leq k \leq m$  設置為  $|0\rangle$ 。

我們使用 **CCNOT** 閘來實現  $(s_m \wedge x_1)$ , 即計算第一個頂點的影響,以增加每個小圈子中的頂點數。我們應用一個 **CCNOT** 閘和兩個 **NOT** 閘來實現  $(s_m \wedge \overline{x_1})$ , 即計算第一個頂點的影響,以保留每個團中的頂點數。我們使用輔助量子位元  $|z_{1,1}\rangle$  儲存實現的結果  $(s_m \wedge x_1)$  並應用輔助量子位元  $|z_{1,0}\rangle$  儲存到的結果  $(s_m \wedge \overline{x_1})$ 。這就是說,兩個輔助量子位元  $|z_{1,1}\rangle$  和  $|z_{1,0}\rangle$  實際上是實現兩個 **CCNOT** 閘邏輯和操作的目標位。因此,兩個輔助量子位元的初始值  $|z_{1,1}\rangle$  和  $|z_{1,0}\rangle$  設置為

$|0\rangle$ 。

我們使用 **CCNOT** 閘來實現  $(x_i = 1 \wedge z_{i,j})$ , 即用於計算  $(i+1)$  頂點  $v_i = 1$  對  $1 \leq i \leq n-1$  的影響, 以增加每個小圈子中的頂點數。我們應用一個 **CCNOT** 閘和兩個 **NOT** 閘來實現  $(\overline{x_{i+1}} \wedge z_{i,j})$ , 即處理  $(i+1)$  頂點  $v_{i+1}$  對  $1 \leq i \leq n-1$  的影響, 以保留每個團中的頂點數。我們使用輔助量子位元  $|z_{i+1,j+1}\rangle$  and  $|z_{i+1,j}\rangle$  for  $0 \leq i \leq n-1$  and  $0 \leq j \leq i$  來存儲實現它們的結果。這就是說, 輔助量子位元  $|z_{i+1,j+1}\rangle$  and  $|z_{i+1,j}\rangle$  for  $0 \leq i \leq n-1$  and  $0 \leq j \leq i$  是實現邏輯和操作的相應 **CCNOT** 閘的目標位元。因此, 輔助量子位元的初始值  $|z_{i+1,j+1}\rangle$  and  $|z_{i+1,j}\rangle$  for  $0 \leq i \leq n-1$  and  $0 \leq j \leq i$  設置為  $|0\rangle$ 。量子位元  $|z_{n,j}\rangle$  對於  $n \geq j \geq 0$ , 用於在計算  $n$  頂點對每個小團中的頂點數的影響後儲存具有  $j$  項目的結果。如果量子位元的值  $|z_{n,j}\rangle$  對於  $n \geq j \geq 0$  等於  $|1\rangle$ , 則它有  $j$  頂點。

我們使用一個 **CNOT** 閘  $\left| \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \oplus z_{n,j} \right\rangle$  將概率振幅最大群乘以  $-1$  和自保持任何其他振幅不變, 其中量子位元  $\left( \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$  是 **CNOT** 閘和量子位元  $(|z_{n,j}\rangle)$  是 **CNOT** 閘。當控制位的值  $(|z_{n,j}\rangle)$  等於  $(|1\rangle)$ , 目標位元變為  $\left( \frac{|1\rangle - |0\rangle}{\sqrt{2}} \right) = (-1) \left( \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$ 。這是為了將答案的概率振幅乘以  $-1$ 。當控制位的值  $(|z_{n,j}\rangle)$  等於  $(|0\rangle)$ , 目標位元仍為  $\left( \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$ 。這是為了保持任何其他振幅不變。

量子運算本質上是可逆的, 因此執行實現預測兩個主要任務的反向順序可以將輔助位還原到其初始狀態。這表明量子搜索演算法的第二階段, 以解決具有  $n$  個頂點和  $\theta$  個邊的圖形  $G = (V, E)$  中最大團問題的實例從  $\frac{1}{\sqrt{2^n}} \left( \sum_{\{x_1 x_2 \dots x_n | \forall x_d \in \{0,1\} \text{ for } 1 \leq d \leq n\}} |x_1 x_2 \dots x_n\rangle \right)$  轉換為  $(-1)^{O_f(x_1 \dots x_n)} \frac{1}{\sqrt{2^n}} \left( \sum_{\{x_1 x_2 \dots x_n | \forall x_d \in \{0,1\} \text{ for } 1 \leq d \leq n\}} |x_1 x_2 \dots x_n\rangle \right)$ 。在圖 3.15 中完成預測量子搜索演算法第二階段的成本是實現  $(2 \times ((2 \times m) + (n \times (n+1))))$  **CCNOT** 閘,  $(n \times (n+1))$  **NOT** 閘和一個 **CNOT** 閘。

由於最大群的頂點數是從  $n$  到零, 所以我們首先檢查是否存在具有  $n$  頂點的群。條件是實現一個 **CNOT** 閘  $\left| \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \oplus z_{n,n} \right\rangle$  將答案的概率乘以  $-1$  並保持其他振幅不變。如果找到帶有  $n$  頂點的答案, 則終止程序的執行。否則, 我們需要繼續測試是否存在  $(n-1)$  頂點、 $(n-2)$  頂點等, 這些頂點有一個頂點, 直到找到答案。

### 3.3.12 量子搜索演算法對最大群問題的第三階段

在圖 3.15 中,量子搜尋演算法的第三階段求解圖  $G = (V, E)$  中最大群問題實例,其中  $n$  個頂點和  $\theta$  邊及其有  $n$  個頂點和  $m$  邊互補圖  $\bar{G} = (V, \bar{E})$ ,其中每個邊為  $E$ ,執行 Grover 擴散運算符,該  $(2^n \times 2^n)$  矩陣  $D$  中的  $D_{a,b} = \frac{2}{2^n}$  if  $a \neq b$  and  $D_{a,a} = \frac{2}{2^n} - 1$ ,執行 Grover 擴散運算符等效於實現  $H^{\otimes n} (2 |0^{\otimes n}\rangle \langle 0^{\otimes n}| - I_{2^n \times 2^n}) H^{\otimes n}$ . 相移器運算子  $(2 |0^{\otimes n}\rangle \langle 0^{\otimes n}| - I_{2^n \times 2^n})$  反轉  $(|x_1^0 \dots x_n^0\rangle)$  之外的所有狀態。在圖 3.15 中,量子搜索問題的第三階段是應用相移運算符  $2 |0^{\otimes n}\rangle \langle 0^{\otimes n}| - I_{2^n \times 2^n}$ ,反轉除  $(|x_1^0 \dots x_n^0\rangle)$  夾在閘之間的所有狀態。也就是說,量子搜索演算法的第三階段是,用  $n$  個頂點和  $\theta$  邊緣求解圖  $G = (V, E)$  中最大群問題的實例,是增加最大群振幅,減小非應答的振幅。

為了解決具有  $n$  個頂點和  $\theta$  邊緣的圖  $G = (V, E)$  中,最大群問題的實例,我們將圖 3.15 中從第二階段到量子搜索演算法第三階段的 Oracle 和 Grover 擴散運算符視為子例程。我們將子例程為 *Grover iteration*。雖然最大小團的頂點數是從  $n$  到零,但在高級中是未知的。因此,我們首先測試是否存在具有  $n$  頂點的群名。條件是實現一個 **CNOT** 閘  $\left| \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \oplus z_{n,n} \right\rangle$  將  $n$  頂點答案的概率振幅乘以  $-1$ ,

並保持任何其他振幅不變。如果有個頂點的群,則重複執行  $O\left(\sqrt{\frac{N}{M}}\right)$  次的 Grover

反覆運算後,使用  $n$  頂點測量答的成功概率至少為  $(1/2)$ 。否則,測量結果失敗,我們需要繼續檢查是否存在  $(n-1)$  頂點、 $(n-2)$  頂點等,該頂點具有一個頂點,直到找到答案之前。

當  $(M/N)$  的值等於  $(1/4)$  時,測量答案的成功概率為  $1$  (100%)與一次性的格羅夫迭地。這是量子搜索演算法在圖形  $G = (V, E)$  中求解最大群問題實例的最佳實例,該圖具有  $n$  個頂點和  $\theta$  邊。當  $M$  的值等於  $1$  時,使用  $O(\sqrt{N})$  次的 Grover 反覆運算測量答案的成功概率至少為  $(1/2)$ 。這是量子搜索演算法中解決圖形  $G = (V, E)$  中最大群問題實例的最差情況,該圖具有  $n$  個頂點和  $\theta$  邊。這意味著,量子搜索演算法,以解決最大團數問題在圖形  $G = (V, E)$  與  $n$  頂點和  $\theta$  邊緣的實例只提供平方加速。

## 3.4 摘要

在本章中,我們正式說明瞭搜索問題。我們提供了可求和問題和最大群問題作為搜索問題的兩個例子。首先,給出了解決可適應性問題和最大群問題的流程圖。介紹了解決可適應性問題和最大群問題的數據依賴性分析。闡述了解決可適應性問題和最大群問題的解決方案空間。接下來,介紹了實現解決方案空間的量子電路,以解決可適應性問題和最大群問題。我們還介紹了甲骨文,並提供了實現甲骨文的量子電路,以解決可適應性和最大群問題。然後,我們闡釋了 Grover 擴散運算符,放大答案的振幅,以解決可適應性和最大群問題。我們還介紹了實現 Grover 擴散運算符的量子電路,以放大答案在可適應性和最大群問題中答案的振幅。最後,提出了兩種量子搜索演算法,解決了可適應性問題及最大群問題。

### 3.5 書目註解

在本章中,可以在推薦的書中找到更詳細的搜索問題導言,這些書是 Imre and Balazs 2005; Lipton and Regan 2014; Nielsen and Chuang 2000; Silva 2018], 在著名的文章[Cook 1972]和著名的教科書[Garey and Johnson 1979]中可以找到關於  $m$  頂點和  $m$  布爾變數的可適應性問題的完整描述。在著名的文章[Chang et al 2008]中可以找到一個完整的量子演算法,用於解決  $m$  子句和  $m$  布爾變數的可適應性問題。

圖  $G=(V, E)$  的最大群問題的完整插圖,其中有  $n$  個頂點和  $m$  條邊緣及其互補圖  $\bar{G}=(V, \bar{E})$  具有  $n$  個頂點和  $m$  條邊,其中每個邊  $\bar{E}$  都出於  $E$ ,可在著名的文章[Karp 1975] 和著名的教科書 [Garey and Johnson 1979] 中找到。一個完整的量子演算法,用於解決圖形  $G=(V,E)$ ,  $E$  中最大團問題的實例,具有  $n$  個頂點和  $m$  條邊緣,其互補圖  $\bar{G}=(V, \bar{E})$  具有  $n$  個頂點和  $m$  條邊,其中每個邊  $\bar{E}$  都出於  $E$ ,可在著名的文章 [Chang et al 2018] 中找到。

量子搜索演算法的完整描述可以在著名的文章[Grover 1996]和[Imre and Balazs 2005; Lipton and Regan 2014; Nielsen and Chuang 2000; Silva 2018].實施格 Grover diffusion 運算符的詳細介紹(量子電路)見著名文章[Coles et al 2018; Mandviwalla et al 2018]和在著名的教科書[Imre and Balazs 2005; Lipton and Regan 2014; Nielsen and Chuang 2000; Silva 2018].

### 3.6 練習

3.1 我們假設圖形  $G = (V, E)$  具有  $V$  是  $G$  中的一組頂點,  $E$  是  $G$  中的一組邊。我們假設  $V$  是  $\{v_1, \dots, v_n\}$  和  $E$  是  $\{(v_a, v_b) | v_a \text{ 和 } v_b \text{ 分別是 } V \text{ 中的元素}\}$  中的元素。我們提出來  $|V|$  是  $V$  的頂點數,  $|E|$  是  $E$  中的邊數。我們還假設  $|V|$  等於  $n$  和  $|E|$  等於  $m$ 。從數學上講, 圖形  $G = (V, E)$  的頂點面是頂點的子集  $V^1 \subseteq V$ , 因此對於  $E$  中的每個邊  $(v_a, v_b)$ , 中至少有一個  $(v_a, v_b)$  屬於  $V^1$ 。圖形  $G = (V, E)$  的頂點覆蓋問題為  $n$  頂點和  $m$  邊, 在  $G$  中尋找最小的頂點蓋。它是一個 **NP-complete** 問題, 可以表述為「計算搜尋」問題。

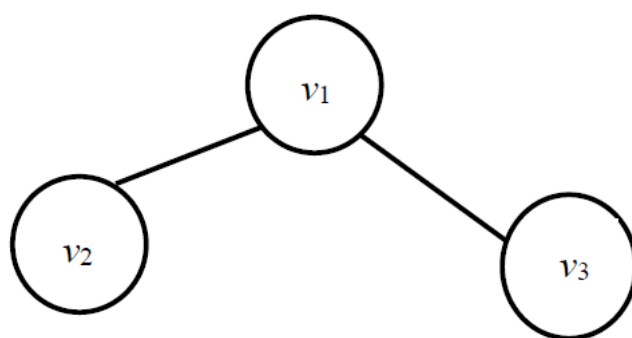


圖 3.16: 圖形  $G^1$  與三個頂點和兩個邊緣的問題。

圖 3.16 是我們問題的一個圖表。在圖 3-16 中, 圖形  $G^1$  由三個頂點和兩個邊組成。此圖形表示頂點覆蓋問題。圖  $G^1$  中的所有頂點是  $\{v_1\}$ ,  $\{v_2, v_1\}$ ,  $\{v_3, v_1\}$ ,  $\{v_3, v_2\}$ , and  $\{v_3, v_2, v_1\}$ 。圖  $G^1$  的最小大小頂點為  $\{v_1\}$ 。因此, 圖 3-16 中頂點蓋問題的大小為 1。請設計一個量子演算法來解圖  $G = (V, E)$  的頂點覆蓋問題的實例,  $n$  頂點和  $m$  邊。

3.2 我們假設圖形  $G = (V, E)$  具有圖  $G$  中的  $V$  是一組頂點, 而  $E$  是圖形  $G$  中的一組邊。圖  $G = (V, E)$ , 其互補圖  $\bar{G} = (V, \bar{E})$  中每個邊  $\bar{E}$  都出  $E$ 。我們還假設  $V$  是  $\{v_1, \dots, v_n\}$  和  $E$  是  $\{(v_a, v_b) | v_a \text{ 和 } v_b \text{ 分別是 } V \text{ 中的元素}\}$ 。我們假設  $|V|$  是  $V$  和  $|E|$  是  $E$  中的邊數。我們還假設  $|V|$  等於  $n$  和  $|E|$  等於  $m$ 。具有  $n$  頂點和  $m$  邊的圖形  $G = (V, E)$  的獨立集是頂點的子集  $V^1 \subseteq V$ , 因此對於所有  $v_a, v_b \in V^1$  邊緣  $(v_a, v_b)$  不在  $E$  中。具有  $n$  頂點與  $m$  邊的圖形  $G = (V, E)$  的獨立集問題是在圖  $G$  中尋找最大獨立集。它是一個 **NP-complete** 問題, 可以表述為「計算搜尋」問題。

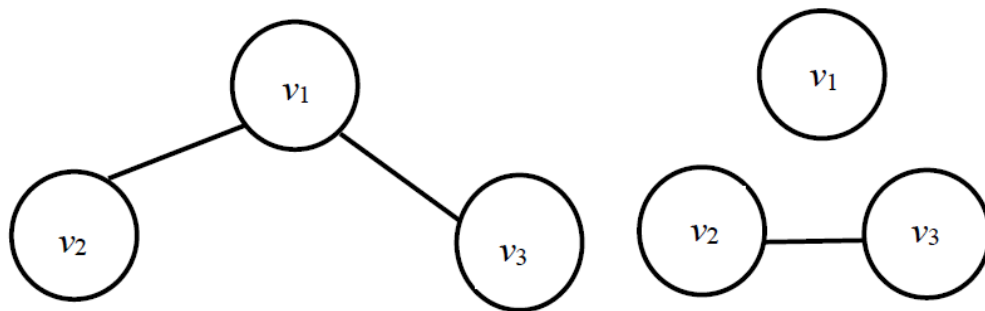


圖 3.17: 圖形  $G^1$  具有三個頂點和兩個邊,其互補圖形具有相同的頂點和一個邊緣的問題。

圖 3.17 是一個圖形及其問題的補充圖。在圖 3-17 中,圖  $G^1$  由三個頂點  $\{v_3, v_2, v_1\}$  和兩個邊緣  $\{(v_1, v_2), (v_1, v_3)\}$  及其互補圖  $\overline{G^1}$  包括相同的頂點和一個邊  $\{(v_2, v_3)\}$ 。圖  $G^1$  中的所有獨立集都是  $\emptyset, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}$  和  $\{v_3, v_2\}$ 。圖形  $G^1$  的最大大小獨立集是  $\{v_3, v_2\}$ 。因此,圖 3-17 中獨立集問題的大小為 2。請設計一個量子演算法,以解決具有  $n$  頂點和  $m$  邊的圖形  $G = (V, E)$  的獨立集問題的實例。

3.3 我們假設圖形  $G = (V, E)$  具有  $V$  是  $G$  中的一組頂點,  $E$  是  $G$  中的一組邊。我們假設  $V$  是  $\{v_1, \dots, v_n\}$  和  $E$  是  $\{(v_a, v_b) \mid v_a \text{ and } v_b \text{ are, respectively, elements in } V\}$ 。我們提出來  $|V|$  是  $V$  的頂點數  $|E|$  是  $E$  中的邊數。我們還假設  $|V|$  等於  $n$  和  $|E|$  等於  $m$ 。在數學上,一個佔主導地位的集圖  $G = (V, E)$  與  $n$  頂點和  $m$  邊緣是頂點的子集  $V^1 \subseteq V$ , 因此對於所有  $u \in V - V^1$  都有一個  $v \in V^1$  其  $(u, v) \in E$ 。圖形  $G = (V, E)$  中具有  $n$  頂點和  $m$  邊的主導集問題是在圖形  $G = (V, E)$  中找到 is to find a 最小大小佔主導地位集,其中有  $n$  個頂點和  $m$  邊。它是一個 **NP-complete** 問題,可以表述為「計算搜尋」問題。

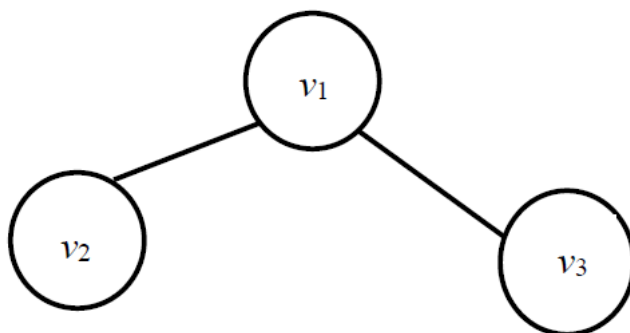


圖 3.18:圖  $G^1$  包含三個頂點和兩個邊緣來解決問題。

圖 3.18 是我們問題的一個圖表。在圖 3-18 中,圖形  $G^1$  具有三個頂點和兩個邊,其中  $\{v_1, v_2, v_3\}$  是頂點集和  $\{(v_1, v_2), (v_1, v_3)\}$  是邊集。圖  $G^1$  的主導集問題,圖 3-18 中有三個頂點和兩個邊,其答案是  $\{v_1\}$ ,即最小大小主導集。因此,圖 3-18 中主導集問題的大小是其中之一。請設計一個量子演算法,以解決圖形  $G = (V, E)$  的主導集問題的實體,  $n$  頂點和  $m$  邊。

3.4 我們假設有限集  $S$  是  $\{u_1, \dots, u_n\}$ , 其中  $u_i$  是  $S$  中的第  $i$  個元素,  $1 \leq i \leq n$ 。我們假設  $|S|$  是  $S$  中的元素數和  $|S|$  等於  $n$ 。我們假設有限集  $S$  的子集集合  $C$  是  $\{C_1, \dots, C_m\}$ , 其中  $C_j$  是  $C$  中的第  $j$  個元素, 具有  $1 \leq j \leq m$ 。我們還假設  $|C|$  是  $C$  的子集數和  $|C|$  等於  $m$ 。在數學上,命中-集是尋找是否存在子集  $S_1 \subseteq S$ , 以便  $S_1$  至少包含  $C$  中每個子集中的一個元素。 $N$ -元素有限集  $S$  和  $m$ -元素集合  $C$  的命中集問題是尋找最小大小的命中集。它是一個 **NP-complete** 問題,可以表述為「計算搜尋」問題。

$$S = \{2, 1\} \text{ and } C = \{\{1\}\}$$

圖 3.19:一個有限集  $S$  和  $S$  子集的集合  $C$  到我們的問題。

圖 3.19 是我們問題的一個示例。在圖 3-19(一個範例)中,我們考慮一個簡單的情況,即有限集  $S$  為  $\{2, 1\}$ , 集合  $\{\{1\}\}$ 。  $S = \{2, 1\}$  和  $C = \{\{1\}\}$  定義命中集問題。對於  $S = \{2, 1\}$  和  $C = \{\{1\}\}$ , 有兩個命中集,分別  $\{1\}$  和  $\{1, 2\}$ 。答案 (最小大小的命中集)命中集的問題為  $S = \{2, 1\}$  和  $C = \{\{1\}\}$  是  $\{1\}$ 。請設計一個量子演算法來解決一個實例,命中集的問題與  $n$  元有限集  $S$  和  $S$  子集的  $m$ -元素集合  $C$ 。

3.5 我們假設  $W = \{w_1, \dots, w_q\}$ ,  $X = \{x_1, \dots, x_q\}$  和  $Y = \{y_1, \dots, y_q\}$  是不相交集。我們還假設有限集  $C \subseteq W \times X \times Y$  和  $C$  是  $\{(w_k, x_l, y_m) | w_k \in W, x_l \in X, \text{ and } y_m \in Y \text{ for } q \geq k, l, \text{ and } m \geq 1\}$  我們假設,  $|C|$  是  $C$  的元素數和  $|C| \geq t$ , 其中  $t$  是正整數。 $C$ 、 $W$ 、 $X$ 、和  $Y$  的三維匹配是具有  $C^1 \subseteq C$  其  $|C^1| \leq t$ , 因此任何座標中  $C^1$  的兩個元素都無一致。與  $C$ 、 $W$ 、 $X$  和  $Y$  的三維匹配問題是找到最大-尺寸的三維匹配。它是一個 **NP-complete** 問題,可以表述為「計算搜尋」問題。

$$W = \{1, 2\}, X = \{3, 4\}, Y = \{5, 6\} \text{ and } C = \{(1, 3, 5), (2, 4, 6), (1, 4, 6)\}$$

圖3.20:有限集  $W$ 、 $X$  和  $Y$  和有限集  $C \subseteq W \times X \times Y$  到我們的問題。

在圖 3.20 中,三個有限集  $W$ 、 $X$ , 和  $Y$  分別為  $\{1, 2\}$ ,  $\{3, 4\}$  和  $\{5, 6\}$ 。有限集  $C \subseteq W \times X \times Y$  和  $C = \{(1, 3, 5), (2, 4, 6), (1, 4, 6)\}$ 。 $W$ 、 $X$ 、 $Y$  和  $C$  這四, 組表示圖

3.20 中的三維匹配問題。C的最大大小三維匹配為  $\{(1, 3, 5), (2, 4, 6)\}$ 。因此,圖 3.20 中的三維匹配問題的大小為 2。請設計一個量子演算法,以解決三維匹配問題的實例到C,W,X和Y。

3.6我們假設有限集 $S$ 是 $\{s_1, \dots, s_d\}$ ,其中 $s_e$  是  $S$ 中的第 $e$ 個元素 $1 \leq e \leq d$ 。我們假設  $|S|$  是  $S$ 中的元素數和 $|S|$ 等於  $d$ 。我們假設有限集 $S$  的子集集合是 $\{C_1, \dots, C_f\}$ ,其中  $C_g$  是  $C$ 中的第 $g$ 個元素  $1 \leq g \leq f$ 。我們假設  $|C|$ 是  $C$  的子集數和 $|C|$ 等於  $f$ 。我們假設正整數  $k$  小於或等於  $|C|$ 在數學上,設置基礎問題是找到  $S$ 子集的 $B$ 集合,  $|B| = k$ ,因此,對於每個 $C_g \in C$ ,有  $B$ 的子集合, $B$ 其聯合正是  $C_g$ 。它是一個**NP-complete**問題,可以表述為「計算搜尋」問題。

在圖 3.21 中,有限集  $S$  為  $\{1, 2\}$ , $S$  子集的集合  $C$  為 $\{\{1\}, \{2\}\}$ 。 $\{1, 2\}$ 的有限集  $S$  和集合  $C$  是 $\{\{1\}, \{2\}\}$ 表示圖 3.21 中的集基問題。圖 3.21 中的有限集  $S$  為  $\{1, 2\}$ 和集合  $C$  的設定基礎 $\{\{1\}, \{2\}\}$ 是  $\{\{1\}, \{2\}\}$ 。因此,圖 3.21 中的有限集  $S$  為  $\{1, 2\}$ 和集合  $C$  的設定基問題的大小為 2  $\{\{1\}, \{2\}\}$ 。請設計一個量子演算法,以解決設定基問題的實例到有限集  $S$  和  $S$ 子集的集合  $C$ 。

$$S = \{1, 2\} \text{ and } C = \{\{1\}, \{2\}\}$$

圖 3.21:問題中  $S$  的有限集  $S$  和  $S$ 子集的集合  $C$ 。

3.7 我們假設,即有限集  $S$  是 $\{s_1, \dots, s_q\}$ , 其中  $s_m$ 是第 $m$ 元素  $1 \leq m \leq q$ 。此外,我們假設  $|S|$ 是  $S$  中的元素數和 $|S|$ 等於  $q$ 。我們假設  $S$  的子集集合  $C$  是 $\{C_1, \dots, C_n\}$ , 其中每個子集  $C_k$  是  $S$  的子集  $1 \leq k \leq n$ 。此外,我們假設  $|C|$ 是  $C$  的子集數和 $|C|$ 等於  $n$ 。我們假設  $C$  中的子集數  $C$  大於或等於  $l$ ,其中  $l$  是正數。有限集  $S$  的集和  $S$  子集的集合  $C$  的集打包問題是查找子集合  $C^1 \subseteq C$ ,以便  $C^1$  至少包含  $l$  相互不同的集。它是一個**NP-complete**問題,可以表述為「計算搜尋」問題。

在圖 3.22 中,有限集  $S$  為  $\{1, 2\}$ ,有限集  $S$ 的子集集合  $C$  為  $\{\{1\}, \{2\}\}$ 。 $\{1, 2\}$ 的有限集  $S$  和集合  $C$  是  $\{\{1\}, \{2\}\}$ 。表示圖 3.22 中的集打包問題。圖 3.22 中的有限集  $S$  的集打包問題 $\{\{1\}, \{2\}\}$ 和集合  $C$  的 $\{\{1\}, \{2\}\}$ 的解題是 $\{\{1\}, \{2\}\}$ 。因此,圖 3.22 中的有限集  $S$  為  $\{1, 2\}$ 和集合  $C$  的集打包問題  $\{\{1\}, \{2\}\}$ 的大小為 2。請設計一個量子演算法,以解決集打包問題的實例到有限集  $S$  和  $S$ 子集的集合  $C$ 。

$$S = \{1, 2\} \text{ and } C = \{\{1\}, \{2\}\}$$

圖 3.22:問題中  $S$  的有限集  $S$  和  $S$  子集的集合  $C$ 。

3.8 我們假設,即有限集  $S$  是  $\{s_1, \dots, s_d\}$ ,其中  $e_e$  是  $S$  中  $1 \leq e \leq d$  的第  $e$  個元素。我們還假設  $|S|$  是  $S$  中的元素數和  $|S|$  等於  $d$ 。我們假設有限集  $S$  的子集集合  $C$  是  $\{C_1, \dots, C_f\}$ ,其中  $C_g$  是  $C$  中  $1 \leq g \leq f$  的第  $g$  個元素。我們還假設  $|C|$  是  $C$  的子集數和  $|C|$  等於  $f$ 。在數學上,設定分割問題是尋找是否存在  $S$  分區為兩個子集  $S_1$  和  $S_2$ ,以便  $C$  中沒有任何子集完全包含在  $S_1$  或  $S_2$  中。它是一個 **NP-complete** 問題,可以表述為「計算搜尋」問題。

在圖 3.23of 中,有限集  $S$  為  $\{1, 2\}$ , $S$  子集的集合  $C$  為  $\{1, 2\}$ 。圖 3.23 中的有限集  $S$  是  $\{1, 2\}$ 和集合  $C\{\{1, 2\}\}$ ,定義集拆分問題。圖 3.23 中的有限集  $S$  為  $\{1, 2\}$  和集合  $C$  的集拆分為  $S_1 = \{1\}$  和  $S_2 = \{2\}$  或  $S_1 = \{2\}$  和  $S_2 = \{1\}$ 。請設計一個量子演算法,以解決集分割問題的實例到有限集  $S$  和  $S$  子集的集合  $C$ 。

$$S = \{1, 2\} \text{ 和 } C = \{1, 2\}$$

圖 3.23:問題中  $S$  的有限集  $S$  和  $S$  子集的集合  $C$ 。

3.9  $n$  布爾變數為  $\{x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n\}$  的 3-滿足問題,並且  $m$  子句包含形式  $C_1 \wedge C_2 \dots \wedge C_m$  的布爾公式,其中每個子句  $C_j$  為  $1 \leq j \leq m$  是三個布爾變數  $x_p, x_q$  and  $x_r$  to  $1 \leq p, q$  and  $r \leq n$  的公式。也就是說,每個子句  $C_j$  為  $1 \leq j \leq m$  只包含三個布爾變數。接下來,問題是查找每個布爾變數的值,以便整個公式具有值 1。這與查找每個布爾變數的值相同,這些值使每個子句具有值 1。它是一個 **NP-complete** 問題,可以表述為「計算搜尋」問題。

例如,我們認為三個布爾變數  $\{x_1 x_2 x_3\}$ 和一個子句  $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$ 存在 3-滿足性問題。三個變數  $x_1, x_2$  和  $x_3$  是布林變數,它們的值僅允許範圍超過兩個值 0 和 1。我們通常認為 0 為「false」,1 為「true」。符號“ $\vee$ ”是「邏輯」或「操作」。滿足子句,  $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$  的值 1 的答案為  $x_1^0 x_2^0 x_3^1$  (001),  $x_1^0 x_2^1 x_3^0$  (010),  $x_1^0 x_2^1 x_3^1$  (011),  $x_1^1 x_2^0 x_3^0$  (100),  $x_1^1 x_2^0 x_3^1$  (101),  $x_1^1 x_2^1 x_3^0$  (110) and  $x_1^1 x_2^1 x_3^1$  (111)。請設計一個量子演算法來解決 3-滿足性問題的實例與  $n$  布爾變數,是  $\{x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n\}$  和  $m$  子句。

3.10  $n$  布爾變數為  $\{x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n\}$  和  $m$  子句的不可等於 3-可適應性問題,它包含形式  $C_1 \wedge C_2 \dots \wedge C_m$  的布爾公式,其中每個子句  $C_j$  為  $1 \leq j \leq m$  是三個布爾變數  $x_p, x_q$  和  $x_r$  to  $1 \leq p, q$  和  $r \leq n$  的公式  $x_p \vee x_q \vee x_r$ 。這表示每個子句  $C_j$  為  $1 \leq j \leq m$  僅包含三個布爾變數。接下來,問題是查找每個布爾變數的值,以

便每個子句  $C_j$  為  $1 \leq j \leq m$  具有至少一個 *true* 布林變數和一個 *false* 布林變數,以便整個公式具有值 1。這與查找每個布林變數的值相同,以便每個  $1 \leq j \leq m$  的子句  $C_j$  至少有一個 *true* 布林變數和一個 *false* 布林變數 使每個子句具有值 1。它是一個 **NP-complete** 問題,可以表述為「計算搜尋」問題。

例如,我們認為,三個布林變數  $\{x_1, x_2, x_3\}$  和一個子句  $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$  的 3-可適應性問題並非全部相等。三個變數  $x_1, x_2$  和  $x_3$  是布林變數,它們的值僅允許範圍超過兩個值 0 和 1。我們通常認為 0 為「false」,1 為「true」。如果布林變數的值等於 1 (1),我們稱之為一個真 *true* 布林變數。如果布林變數的值等於 0 (零),我們稱之為一個 *false* 布林變數。符號“ $\vee$ ”是「邏輯」或「操作」。滿足該子句,  $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$  的答案至少有一個 *true* 布林變數和一個 *false* 布林變數 使子句  $x_1^0 x_2^0 x_3^1$  (001),  $x_1^0 x_2^1 x_3^0$  (010),  $x_1^0 x_2^1 x_3^1$  (011),  $x_1^1 x_2^0 x_3^0$  (100),  $x_1^1 x_2^0 x_3^1$  (101) and  $x_1^1 x_2^1 x_3^0$  (110) 的值為 1 其。請設計一個量子演算法來解決一個實例,不等於 3 的可存取性問題與  $n$  布林變數,是  $\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$  和  $m$  子句。

3.11  $\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$  和  $m$  子句的  $n$  布林變數的三分之一的 3 滿足性問題包含一個組成  $C_1 \wedge C_2 \dots \wedge C_m$  的公式,每個子句  $C_j$  for  $1 \leq j \leq m$  是三個布林變數  $x_p, x_q$  and  $x_r$  to  $1 \leq p, q$  and  $r \leq n$  組成  $x_p \vee x_q \vee x_r$  的公式,也就是說,每個子句  $C_j$  為  $1 \leq j \leq m$  只包含三個布林變數。接下來,問題是查找每個布林變數的值,以便每個子句  $C_j$  為  $1 \leq j \leq m$  具有正好一個 *true* 布林變數,以便整個公式具有值 1。這與查找每個布林變數的值相同,以便每個  $C_j$  for  $1 \leq j \leq m$  的子句都具有一個 *true* 布林變數,使每個子句具有值 1。它是一個 **NP-complete** 問題,可以表述為「計算搜尋」問題。

例如,我們認為三個布林變數  $\{x_1, x_2, x_3\}$  和一個子句  $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$  存在三個三個滿足性問題。三個變數  $x_1, x_2$  和  $x_3$  是布林變數,它們的值僅允許範圍超過兩個值 0 和 1。我們通常認為 0 為「false」,1 為「true」。如果布林變數的值等於 1 (1),我們稱之為一個真正的 *true* 布林變數。如果布林變數的值等於 0 (零),我們稱之為一個 *false* 布林變數。符號“ $\vee$ ”是「邏輯」或「操作」。滿足子句,  $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$  的答案  $x_1^0 x_2^0 x_3^1$  (001),  $x_1^0 x_2^1 x_3^0$  (010) and  $x_1^1 x_2^0 x_3^0$  (100) 正好有一個 *true* 布林變數,使值是 1。請設計一個量子演算法來解決一個 the 實例的三分之一的三相的可坐性問題與  $n$  布林變數,是  $\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$  和  $m$  子句。

3.12 我們假設有限集  $S$  是  $\{s_1, \dots, s_A\}$  其中  $s_k$  是  $S$  中的一個元素,表示  $1 \leq k \leq A$ 。我們還假設  $|S|$  是  $S$  中的元素數和  $|S|$  等於  $A$ 。我們假設  $S$  的子集集合  $C$  是  $\{C_1, \dots, C_B\}$ , 其中  $C_i$  是  $S$  的子集  $1 \leq i \leq B$ 。我們假設  $|C|$  是  $C$  的元素數和  $|C|$  等於  $B$ 。我們假設  $m$  是一個正整數。 $S$  的集合面是子集合  $C^1 \subseteq C$ , 包含  $|C^1| \leq m$  使  $S$  的每個元素至少屬於  $C^1$  的一個成員,其中  $|C^1|$  是  $C^1$  中的元素數。設定蓋問

題是  $S$  找到最小大小的集蓋。它是一個 **NP-complete** 問題,可以表述為「計算搜尋」問題。

在圖 3.24 中,有限集  $S$  為  $\{1, 2, 3\}$ ,  $S$  子集的集合  $C$  為  $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$ 。圖 3.24 中的有限集  $S$  是  $\{1, 2, 3\}$  和  $S$  子集的集合  $C$ , 即  $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$  表示集封面問題。圖 3.24 中的最小-大小設置為  $\{1, 2, 3\}$  的有限集  $S$  和  $S$  子集的集合  $C$   $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$  是  $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$ 。請設計一個量子演算法來解決集覆蓋問題的實例的有限集  $S$  和集合  $C$  的  $S$  子集  $S$ 。

$$S = \{1, 2, 3\} \text{ and } C = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$$

圖 3.24:問題中  $S$  的有限集  $S$  和  $S$  子集的集合  $C$ 。

3.13 我們假設有限集  $S$  是  $\{s_1, \dots, s_{3 \times q}\}$ , 其中  $s_k$  是  $S$  中的一個元素, 表示  $1 \leq k \leq 3 \times q$ 。我們還假設  $|S|$  是  $S$  中的元素數  $S$ , 等於  $3 \times q$ 。我們假設 3 元素子集的集合  $C$  到  $S$  是  $\{C_1, \dots, C_B\}$  每個子集  $C_i$  包含三個元素在  $S$  中為  $1 \leq i \leq B$ 。我們假設  $|C|$  是  $C$  中的元素數  $C$ 。  $S$  的精確封面是子集合  $C^1 \subseteq C$ , 因此  $S$  的每個元素正好發生在  $C^1$  的成員。精確覆寫 3 組的問題是找到  $S$  的最小-大小精確覆寫。它是一個 **NP-complete** 問題,可以表述為「計算搜尋」問題。在圖 3.25 中,有限集  $S$  為  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , 3 元素子集到  $S$  的集合  $C$  為  $\{\{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$ 。圖 3.25 中的有限集  $S$  是  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  和 3 元素子集的集合  $C$  到  $S$ , 即  $\{1, 2, 3\}$ 、 $\{3, 4, 5\}$ 、 $\{4, 5, 6\}$  "表示按 3 集精確覆蓋的問題。圖 3.25 中有限集  $S$  的最小-大小精確覆蓋率為  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , 3 元素子集  $S$  的集合  $C$  為  $\{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}$ 。請設計一個量子演算法,以解決一個有限集  $S$  的精確覆蓋問題  $S$ , 以及一個 3 個元素子集到  $S$  的集合  $C$ 。

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ and } C = \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}\}$$

圖 3.25:問題中 3 元素子集的有限集  $S$  和集合  $C$ 。